系名____________ 班级______________ 姓名_______________ 学号_________________

解答

一．填空题（每空 3 分，共 10 题）（请将答案直接填写在横线上！）

1. 设 f 连续，交换累次积分的次序 $\int_1^2 dx\int_0^x f(x,y)dy =$ ________________________________。

$\int_0^1 dy\int_1^2 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

2. 马鞍面 $z=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截，截得的有界部分曲面的面积为________________。

$\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$

3. 设曲面 $S^+: z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，方向向下。则 $\iint_{S^+} x dy\wedge dz + y dz\wedge dx + z dx\wedge dy =$ ___________。

$-\pi$

4. 设 $L: x^2+y^2=1$，则 $\int_L (x+y)^2 dl =$ _________________。2π

5. 设 L^+ 为从 $(0,0)$ 点到 $(1,2)$ 点的有向线段，则 $\int_{L^+} xy^2dx+x^2ydy =$ ___________。2

6. 设 $f(x,y)=x^2y^2$，则在点 $(1,1)$ 处，$\mathrm{div}(\mathrm{grad} f)=$ _________________。4

7. 设 $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(yz,zx,xy)$，则 $\mathrm{rot}\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=$ _________________。**0**

8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$ 的收敛性为____________。（填“绝对收敛”，“条件收敛”或“发散”）

绝对收敛

9. 设 2π 周期函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0)\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases}$ 的形式 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则

$S(0)=$ _____。 $\frac{1}{2}$

10. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$f(x)=x$，$x\in[0,1]$。若 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则 $b_n =$ ____________。 $\frac{(-1)^{n+1}2}{n\pi}$

二．解答题（共 6 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11. 已知曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} (e^x\sin y - x - y)dx + (e^x\cos y - ax)dy$ 与路径无关。

（I）求 a 的值；

（II）求$\int_{(0,0)}^{(2,\pi)}(\mathrm{e}^x\sin y-x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$。

解：（I）$\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x\cos y-ax)=\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^x\sin y-x-y)$，

$$\mathrm{e}^x\cos y-a=\mathrm{e}^x\cos y-1，$$

所以当且仅当$a=1$时$\int_{L(A)}^{(B)}(\mathrm{e}^x\sin y-x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$与路径无关。

（II）当$a=1$时，$(\mathrm{e}^x\sin y-x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\sin y-\dfrac{x^2}{2}-xy)$，

所以$\int_{(0,0)}^{(2,\pi)}(\mathrm{e}^x\sin y-x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=\left(\mathrm{e}^x\sin y-\dfrac{x^2}{2}-xy\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(2,\pi)}=-2-2\pi$。

12. 设Ω为由$z=1-(x^2+y^2)$和$x^2+y^2+z^2=1$围成的空间有界区域，求$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

解：积分区域$1-z\le x^2+y^2\le 1-z^2$，用柱坐标计算

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 z\left(\iint\limits_{1-z\le x^2+y^2\le 1-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 z\left(2\pi\int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z^2}}r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^1 z(z-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{12}$$

或：

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^0 z\left(\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z+\int_0^1 z\left(\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_{-1}^0 z(1-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_0^1 z(1-z)\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{\pi}{12}$$

本题解法二：

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{1-x^2-y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\pi\int_0^1\rho^2(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{12}$$

或：$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1-x^2-y^2} z\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=-\pi\int_0^1\rho^2(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=-\frac{\pi}{12}$$

13. 求幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$ 的收敛半径及和函数。

解：设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$，则收敛半径为$\infty$。

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}=\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{\sin x}{2x}-\frac{1}{2},$$

$$S(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2},$$

14. 设 S^+ 为包含两点 $(-1,0,0),(1,0,0)$ 在其内的逐片光滑的正则闭曲面，方向向外，记 $\vec{\mathbf{r}}_1=(-1,0,0)$，$\vec{\mathbf{r}}_2=(1,0,0)$，$\vec{\mathbf{r}}=(x,y,z)$，函数 $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=a\frac{\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_1}{\left\|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_1\right\|^3}+b\frac{\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_2}{\left\|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_2\right\|^3}$，其中 a,b 为常数。求 $\iint\limits_{\mathrm{S}^+}\vec{\mathbf{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}$。

解：记 $\mathbf{S}_i^+, i=1,2$：$\left\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\right\|=\varepsilon$，方向向外。

当 $\mathbf{r}\ne\mathbf{0}$ 时，$\mathrm{div}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}=\frac{3}{\|\mathbf{r}\|^3}-\frac{3}{\|\mathbf{r}\|^4}\left(x\frac{\partial\|\mathbf{r}\|}{\partial x}+y\frac{\partial\|\mathbf{r}\|}{\partial y}+z\frac{\partial\|\mathbf{r}\|}{\partial z}\right)=\frac{3}{\|\mathbf{r}\|^3}-\frac{3}{\|\mathbf{r}\|^4}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\|\mathbf{r}\|}\right)=0$，

所以由 Gauss 公式，$\iint\limits_{\mathbf{S}^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iint\limits_{\mathbf{S}_1^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}+\iint\limits_{\mathbf{S}_2^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=a\iint\limits_{\mathbf{S}_1^+}\mathbf{F}_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}+b\iint\limits_{\mathbf{S}_2^+}\mathbf{F}_2\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$

其中 $\mathbf{F}_k(x,y,z)=\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_k}{\left\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k\right\|^3}$。

而 $\oiint\limits_{\|\mathbf{r}\|=\varepsilon}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iint\limits_{\|\mathbf{r}\|=\varepsilon}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\cdot\frac{\mathbf{r}}{\varepsilon}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\|\mathbf{r}\|=\varepsilon}\mathrm{d}S=4\pi$，

所以 $\iint\limits_{S^+} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi(a+b)$。

15. 计算 $\iint\limits_D \cos\dfrac{x}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x+y\le 3,\ 0\le \dfrac{x}{x+y}\le 1\right\}$。

解：令 $\begin{cases} u=x+y \\ v=\dfrac{x}{x+y}\end{cases}$，则 $\begin{cases} x=uv \\ y=u-uv\end{cases}$，$\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u\end{pmatrix}\right| = |u|$，

$D_1=\{(u,v)\,|\,0\le v\le 1, 1\le u\le 3\}$，

$$\iint\limits_D \cos\frac{x}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} u\cos v \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \cos v\mathrm{d}v\int_1^3 u\mathrm{d}u = 4\sin 1。$$

16. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$， $0<T\le+\infty$。

（I）若 $u,v\in \mathrm{C}^{(2)}(\Omega)$，记 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$， $\nabla u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$，$\vec{\mathbf{n}}$ 为 Ω 边界 $\partial\Omega$ 的外法向量，证明：$\iiint\limits_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial\Omega} v\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\mathrm{d}S - \iiint\limits_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

（II）设 $f(x,y,z,t)\in \mathrm{C}^{(1)}(\Omega\times[0,T))$，证明：$\forall t\in[0,T)$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_\Omega f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z；$$

（III）设 $w(x,y,z,t)\in \mathrm{C}^{(2)}(\Omega\times[0,T))$，满足：

（1）$\dfrac{\partial w}{\partial t}=\Delta w + w^3$；　　（2）当 $(x,y,z)\in\partial\Omega$ 时，$\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,y,z,t)\equiv 0$， $\forall t\in[0,T)$；

记 $\|\nabla w\| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2}$，证明：$F(t)=\iiint\limits_\Omega\left(\dfrac{1}{2}\|\nabla w\|^2-\dfrac{1}{4}w^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在 $[0,T)$ 上为单调递减函数。

证明：（I）$\iint\limits_{\partial\Omega} v\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial\Omega^+} v\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint\limits_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

所以 $\iiint\limits_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial\Omega} v\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S - \iiint\limits_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

（II）记 $I(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，则 $\forall t_0\in[0,T)$，

$$\left|\frac{I(t_0+\Delta t)-I(t_0)}{\Delta t}-\iiint\limits_{\Omega} f_t(x,y,z,t_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|$$

$$=\left|\iiint\limits_{\Omega}\frac{f(x,y,z,t_0+\Delta t)-f(x,y,z,t_0)}{\Delta t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_{\Omega} f_t(x,y,z,t_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|$$

由中值定理，$\dfrac{f(x,y,z,t_0+\Delta t)-f(x,y,z,t_0)}{\Delta t}=f_t(x,y,z,t_0+\theta\Delta t)$，而 $f_t(x,y,z,t)$ 为连续函数，所以 $f_t(x,y,z,t)$ 在 $\Omega\times[0,a]$ 一致连续，其中常数 $a>t_0$。所以

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall\Delta t:|\Delta t|<\delta$，$|f_t(x,y,z,t_0+\theta\Delta t)-f_t(x,y,z,t_0)|<\varepsilon$

所以 $\left|\dfrac{I(t_0+\Delta t)-I(t_0)}{\Delta t}-\iiint\limits_{\Omega} f_t(x,y,z,t_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|<V\varepsilon$，其中 V 为 Ω 的体积。故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z。$$

【注 1】本题是三重含参积分，不能直接用定积分的含参积分的结论。不写具体证明，不给分。

【注 2】若化成累次积分，连续用 3 次含参积分的结论，可以得分。

（III）由（II）知，

$$F'(t)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2-\frac{1}{4}w^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}-w^3\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}-\left(\frac{\partial w}{\partial t}-\Delta w\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\nabla w\cdot\nabla\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+\Delta w\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

由（1），记 $u=w,v=\dfrac{\partial w}{\partial t}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}\nabla w\cdot\nabla\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial\Omega}\dfrac{\partial w}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\partial w}{\partial t}\Delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

而当$(x,y,z)\in\partial\Omega$，$t\in[0,T)$，$w(x,y,z,t)\equiv 0$，$\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,y,z,t)\equiv 0$，所以$\iint\limits_{\partial\Omega}\dfrac{\partial w}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S=0$，

$F'(t)=-\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\le 0$， $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{1}{2}|\nabla w|^2-\dfrac{1}{4}w^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在$[0,T)$上为单调递减函数。

三．**附加题**

称向量场$\vec{\mathbf{F}}:D=R^2\setminus\{O\}\to R^2$是以$O$为中心的有心力场，若$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})//\vec{\mathbf{r}}$（$\forall\mathbf{r}\in D$）。

(Ⅰ) 证明$C^{(1)}$有心力场$\vec{\mathbf{F}}$是保守场当且仅当$\|\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})\|$只与$r=\|\vec{\mathbf{r}}\|$有关。

(Ⅱ) （I）中结论对3维空间中的$C^{(1)}$类有心力场是否依然成立？

证明：(Ⅰ) **充分性**：设$\mathbf{F}(\mathbf{r})=f(r)\mathbf{r}$。则取$g$为$rf(r)$的原函数，令$U(\mathbf{r})=g(\|\mathbf{r}\|)$。则

$\nabla U(\mathbf{r})=g'(r)\nabla\|\mathbf{r}\|=rf(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}=f(r)\mathbf{r}$。所以$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\nabla U(\mathbf{r})$。

必要性：设$\mathbf{F}(\mathbf{r})=f(\mathbf{r})\mathbf{r}$。

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{r})&=\frac{\partial\big(f(x,y)y\big)}{\partial x}-\frac{\partial\big(f(x,y)x\big)}{\partial y}\\
&=y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xy\left(\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&=xy\left[\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)-\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\right]\\
&=xy\left[\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\frac{1}{x}-\frac{y}{r}\frac{1}{y}\right)+\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\frac{1}{x}\frac{-y}{x^2+y^2}-\frac{1}{y}\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right]\\
&=-\frac{\partial f}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

因为$\mathbf{F}$是保守场，所以$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{r})=0$，因此$\dfrac{\partial f}{\partial\theta}=0$，从而$f$只是$r=\|\mathbf{r}\|$的函数。$\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\|=\|f(r)\mathbf{r}\|=r|f(r)|$。

(Ⅱ) （I）中结论对3维空间中的$C^{(1)}$类有心力场依然成立。

充分性：设 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$。则取 g 为 $rf(r)$ 的原函数，令 $U(\mathbf{r}) = g(\|\mathbf{r}\|)$。则

$\nabla U(\mathbf{r}) = g'(r)\nabla\|\mathbf{r}\| = rf(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r} = f(r)\mathbf{r}$。所以 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r})$。

必要性：设 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{r}$。

$$0 = \frac{\partial\left(f(x_1,x_2,x_3)x_1\right)}{\partial x_2} - \frac{\partial\left(f(x_1,x_2,x_3)x_2\right)}{\partial x_1} = x_1x_2\left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{1}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

所以由(Ⅰ)知 $f(x_1,x_2,x_3)$ 只与 $f(0,\sqrt{x_1^2+x_2^2},x_3)$ 有关。

$$0 = \frac{\partial\left(f(0,x_2,x_3)x_2\right)}{\partial x_3} - \frac{\partial\left(f(0,x_2,x_3)x_3\right)}{\partial x_2} = x_2x_3\left(\frac{1}{x_3}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{1}{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

所以由（I），$f(0,x_2,x_3)$ 只与 $\sqrt{x_2^2+x_3^2}$ 有关。

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 只与 $f(0,\sqrt{x_1^2+x_2^2},x_3)$ 有关，$f(0,\sqrt{x_1^2+x_2^2},x_3)$ 只与 $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 有关，故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 只与 $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 有关。