清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　　　　　**微积分 A(2)**　　　　　2020 年 6 月 8 日

系名________________　班级______________　姓名______________　学号____________

说明：2020 春微积分 A（2）期末考题有 A，B，C，D，……不同种类的试卷，试卷的抬头没有标记试卷的种类，但是不同种类的试卷有差异。每个学生被随机地分配一种试卷。如果做了不该做的试卷，按校纪处理。

1. （10 分）已知 $y=y(x), z=z(x)$ 是方程组 $\begin{cases} x^3+y^3-z^3=10 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 附近确定的隐函数，求 $y=y(x), z=z(x)$ 在 $x_0=1$ 点处的导数 $y'(1), z'(1)$.

2. （10 分）设 $f\in C^{(2)}(\mathbf{R})$， $z=f(x^2+xy+y^2)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在点 $(1,1)$ 处的值。

3. （10 分）求 $u=(\sin x)(\sin y)(\sin z)$ 在约束条件 $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}(x>0, y>0, z>0)$ 下的极值，并说明所求的极值是极大值，还是极小值。

4. （10 分）计算 $\displaystyle\iint_D \left|\frac{y}{x}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2x\}$.

5. （10 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,x>0\}$。

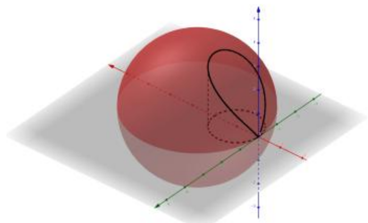
（I）若 $A,B\in D$，L 为 D 内连接 A,B 两点的逐段光滑的曲线，问 $\displaystyle\int_{L(A)}^{(B)} \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$ 是否与路径 L 有关？说明理由；

（II）是否存在二元函数 $z=z(x,y)$，使得 $\mathrm{d}z=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$？

若存在，求 $z(x,y)$；若不存在，说明理由。

6. （10 分）求 $\displaystyle\iiint_\Omega \sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$.

7. （10 分）设 $a>1$，有向曲线 $L^{+}:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2ax\\ x^2+y^2=2x\end{cases}\quad (z\ge 0)$，



从 z 轴正向看去，为逆时针方向。

求 $\int_{L^{+}}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

8. （10 分）设 2π 周期函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

（I）求 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数；

（II）利用（I）的结论求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

9. （10 分）设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是包含原点的有界开区域，其边界 $\partial\Omega$ 是 $C^{(1)}$ 类光滑正则曲面。记 $\mathbf{r}=(x,y,z)$， $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

求证：$\dfrac{1}{2}\iint\limits_{\partial\Omega}\cos<\mathbf{r},\mathbf{n}>\mathrm{d}S=\lim\limits_{\varepsilon\to0^{+}}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}$，其中 $\Omega_\varepsilon=\{(x,y,z)\in\Omega\,|\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\varepsilon\}$，$<\mathbf{r},\mathbf{n}>$ 表示向量 $\mathbf{r}$ 与 $\partial\Omega$ 的单位外法向量 $\mathbf{n}$ 的夹角。

10. （10 分）设 $a_n\ge0, n=0,1,2,\cdots$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n n!$ 收敛，记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$。求证：

（I）级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$；

（II）广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n n!$。

（提示：$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x=n!$）。

11. 附加题（本题分数不计入总分，仅用于评定 A+）　　设 $0<p\le\dfrac{1}{2}$.

（I）证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^p}$ 关于 x 在区间 $[0,2\pi]$ 上收敛，但不一致收敛；

（II）判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^p}$ 是否为某个连续的 2π 周期函数的形式 Fourier 级数，并说明理由。