## 微积分A(2)期末考题(A)

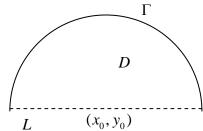
## 一. 填空题(每空3分,共15空)(请将答案直接填写在横线上!)

- 1. 交换累次积分次序  $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y) dx = ______.$
- 2. 设曲线 L 的参数方程为  $x=1-\sin t$  ,  $y=1-\sqrt{2}\cos t$  ,  $0 \le t \le 2\pi$  ,则第一类曲线积分  $\int \sqrt{x^2-2x+2} \ dl = \underline{\hspace{1cm}}$  。
- 4.  $\vec{V}(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$ ,  $\emptyset \text{div} \vec{V} = \underline{\hspace{1cm}}$
- 5.  $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ , 则 grad  $f = _____$ , rot(grad f) = \_\_\_\_\_\_。
- 6. 设 函 数  $f(x) = x^2 + x + 2$  在 区 间 [0,2) 上 的 Fourier 展 开 为  $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)], \quad \bigcup S(0) = \underline{\hspace{1cm}}.$
- 7. 三重积分  $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} x^{99} y^{100} z^{101} dx dy dz = \underline{\hspace{1cm}}.$
- 8. 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$  的和为\_\_\_\_\_\_\_。
- 10. 第二类曲线积分  $\int_{L^+} \frac{x^{\lambda} dy y dx}{x^2 + y^2} = 0$  对上半平面的任意光滑闭曲线 L 都成立,则常数  $\lambda =$ \_\_\_\_\_\_\_。
- 11.  $S^+$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧,则第二类曲面积分  $\bigoplus_{S^+} x dy \wedge dz + \cos y dz \wedge dx + dx \wedge dy = \underline{\hspace{1cm}} .$

- 12. 函数  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$  在  $x_0 = 0$  点的幂级数展开为\_\_\_\_\_\_
- 13. 设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$  在 x=3 处收敛, 且当 x<3 时发散, 则 a=\_\_\_\_\_\_。
- 14. 设  $D = \{ (x, y) | 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1 \}$ , 则 D 的形心横坐标  $\overline{x} = \underline{\hspace{1cm}}$
- 二. 计算题 (每题 10 分, 共 40 分)
- 1. 设 $S^+$ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$   $(0 \le z \le 1)$ 的下侧,求 $\iint_{S^+} (x + y) dy \wedge dz + (2y z) dz \wedge dx$ 。
- 2. 求两个球体  $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ 、  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 4$  相交部分的体积。
- 3. 设 $f(x) = \sin^2(x^2)$ ,
  - (I) 求 f(x) 在  $x_0 = 0$  点的幂级数展开;
  - (II)  $\dot{x} f^{(n)}(0), n = 1, 2, 3, \dots$
- 三. 证明题
- 1. (8分)(I)  $2\pi$  为周期的函数 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上的定义为  $f(x) = \cos \alpha x$  ( $\alpha$  不是整数),将其展成 Fourier 级数(提示:  $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ );

(II) 利用 (I) 证明: 
$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}, \quad x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

2. (7 分) 设函数 P(x,y),  $Q(x,y) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$ , 在以任意点 $(x_0,y_0)$ 为中心,任意正数r为 半径的上半圆周 $\Gamma$ 上的第二类曲线积分



$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \cdot 菜证: 在 \mathbb{R}^{2} 上有$$
$$P(x, y) \equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \equiv 0 \cdot$$

(提示:用 Green 公式)