微积分 A（2）期末考题（A）

一． 填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上!）

1．交换累次积分次序 $\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx=$________________。

2．设曲线 L 的参数方程为 $x=1-\sin t$， $y=1-\sqrt{2}\cos t$， $0\le t\le 2\pi$，则第一类曲线积分 $\int_L\sqrt{x^2-2x+2}\,dl=$____________________。

3．设 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $\iint_S (x+1)^2 dS=$___________________。

4．$\vec{V}(x,y,z)=(x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz)$，则 $\mathrm{div}\vec{V}=$_________________。

5．$f(x,y,z)=e^{x+y+z}$，则 $\mathrm{grad}\ f=$_______________，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ f)=$________________。

6. 设函数 $f(x)=x^2+x+2$ 在区间 $[0,2)$ 上的 Fourier 展开为 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)]$，则 $S(0)=$_________。

7．三重积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}x^{99}y^{100}z^{101}dxdydz=$________________。

8．级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ 的和为__________________。

9．函数 $\frac{1}{1-x}$ 在 $x_0=2$ 点的 Taylor 级数为____。

10. 第二类曲线积分 $\int_{L^+}\frac{x^\lambda dy-ydx}{x^2+y^2}=0$ 对上半平面的任意光滑闭曲线 L 都成立，则常数 $\lambda=$_________________。

11. S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则第二类曲面积分 $\oiint_{S^+}xdy\wedge dz+\cos y dz\wedge dx+dx\wedge dy=$______________________________。

12. 函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开为__________________________。

13. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=3$ 处收敛, 且当 $x<3$ 时发散, 则 $a=$____________。

14. 设 $D=\left\{ (x,y) \middle| 0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le 1 \right\}$, 则 D 的形心横坐标 $\bar{x}=$____________。

二. 计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 设 S^+ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 的下侧，求 $\iint\limits_{S^+}(x+y)dy\wedge dz+(2y-z)dz\wedge dx$。

2. 求两个球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$、$x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 相交部分的体积。

3. 设 $f(x)=\sin^2(x^2)$，

（I）求 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开；

（II）求 $f^{(n)}(0), n=1,2,3,\cdots$。

4. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}\quad(x>0)$，求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx$。

三. 证明题

1.（8 分）（I）2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的定义为 $f(x)=\cos\alpha x$（α 不是整数），将其展成 Fourier 级数（提示：$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$）；

（II）利用（I）证明：$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},\quad x\ne k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

2. （7 分）设函数 $P(x,y),Q(x,y)\in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$，在以任意点 (x_0,y_0) 为中心，任意正数 r 为半径的上半圆周 Γ 上的第二类曲线积分 $\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$。求证：在 $\mathbb{R}^2$ 上有

$$P(x,y)\equiv 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0。$$

（提示：用 Green 公式）