清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 **2010级多元微积分期末考题（A）**

系名__________ 班级__________ 姓名__________ 学号__________

一. 填空题（每空3分，共15空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. $\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1 \frac{dx}{(1+xy)^{1/y}} =$ ____________。

2. 交换累次积分次序 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx =$ ____________。

3. 设 D 平面上以原点为圆心的闭单位圆盘，则二重积分 $\iint\limits_D y\sin(x^4+y^4)dxdy =$ ________。

4. 由六个平面 $3x-y-z=\pm 1$，$x+3y-z=\pm 1$，$-x-y+3z=\pm 1$ 的所围立体体积

   $V=$ ____________。

5. 设曲线 L 的参数方程为 $x=1-\sin t$，$y=1-\cos t$，$0\le t\le 2\pi$，则第一类曲线积分

   $\int\limits_L \frac{y^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} dl =$ ____________。

6. $\int\limits_{L^+} ydx - xdy =$ ____________，其中 L^+ 为曲线 $y=x^2-1$ 从 $A(0,-1)$ 到 $B(1,0)$。

7. 积分 $\iint\limits_S (xy+yz+zx+1)dS =$ __________，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2$ 所截得的有限部分。

8. 柱面 $x^2+y^2=1$ 介于曲面 $z=1+x^2$ 与平面 $z=0$ 之间的面积为____________。

9. 设 S^+ 为圆柱面 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=1, 0\le z\le 2\}$ 的外侧，则第二类曲面积分

   $\iint\limits_{S^+} e^{x+y}dx\wedge dy + (y-z)dy\wedge dz =$ ____________。

10. $\vec{V}(x,y,z)=(x+y+z, xy+yz+zx, xyz)$，则 $div\vec{V}=$ __________。

11. $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$，则 $gradf =$ __________，$rot(gradf)=$ ________。

12. 方程组 $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x+3y \end{cases}$ 的通解为 ________________。

13. 设 $du = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy + \sin zdz$，则 $u(x,y,z) =$ ____________________。

14. 设 $y = x^2 e^{2x}$ 为三阶**常系数**线性齐次常微分方程的一个解，则该微分方程的通解为

____。

二. 计算题

1. （8 分）设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$，其周长为 a，计算 $\oint\limits_L (3x + 2y + 1)^2 dl$。

2. （10 分） 求积分 $\iint\limits_{S^+} \dfrac{xdy \wedge dz + (z+1)^2 dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$， S^+ 为下半球面 $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的下侧。

3. （10 分）计算积分 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$，$\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$。

4. （12 分）设 $f(x)$ 二阶可导，$f(1) = 0, f'(1) = 0$，并设在右半平面（$x > 0$），第二类曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} \left(\dfrac{9}{x^2} - 2f(x)\right) ydx - \left(x^2 f'(x) + \sin y\right)dy$ 与路径无关，求 $f(x)$。

三. 证明题

1. （7 分）设 f 为连续函数，证明：$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)dz = \dfrac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 f(z)dz$。

2. （8 分） 设 $D \subset R^2$ 为单连通有界闭区域，其边界 ∂D 逐段光滑，逆时针为正方向，$\mathbf{n}$ 为边界的外法向量，二阶连续可微函数 $u(x,y)$ 为 D 内的调和函数，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0,\ (x,y) \in D$，$\mathbf{r}_0$ 为 D 内任意一点，$\mathbf{r}$ 为 $\mathbf{r}_0$ 到 ∂D 上点的向量，$r = \|\mathbf{r}\|$。证明：

（1） $u(\mathbf{r}_0) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial D} \left(u \dfrac{\cos < \mathbf{r}, \mathbf{n} >}{r} - \ln r \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dl$；

（2）如果 L_R 为以 $\mathbf{r}_0$ 为圆心，R 为半径的圆，则 $u(\mathbf{r}_0) = \dfrac{1}{2\pi R} \int\limits_{L_R} u(x,y) dl$。