清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分（II）(期终考试) A卷 2008年6月17日

班级____________ 姓名______________ 学号________________

一、填空题（每题5分，共30分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^{n}=$____________.

2．$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=$____________.

3．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$ 的收敛区间是____________.

4．设 $f(x)=\ln(1+x^2)$，则 $f^{(99)}(0)=$____________；$f^{(100)}(0)=$____________.

5．已知函数 $f(x)=x-[x]\ (x\in R)$，其中 $[x]$ 是取整函数．设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数，则 $S(\frac{1}{2})=$____________，$S(1)=$____________.

6．函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的定义是：______________.

二、解答题（每题 10 分，共 70 分）：解答题应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

7．已知 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2n\sin\frac{1}{n}} a_n = 1$，试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性.

8．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

9．将函数 $f(x) = x(2\pi - x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$ 展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数.

10．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{3^{\frac{k}{n}}}{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k3^{\frac{k}{n}}}{kn+1}$ 的值.

11．证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)^2$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

12．已知函数 $f(x), g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上可积，证明函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 也在 $[a, b]$ 上可积.

13．设函数 $u_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 在 (a, b) 上连续，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛于函数 $S(x)$，证明 $S(x)$ 在 (a, b) 上连续.