2006 级多元微积分期末考题（A）

2007.6.28

一、填空题（每空 3 分，共 15 空）

1．设 $F(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y}dy$，则 $F'(x)=$___________

2．设函数 $f(x,y)$ 在 $\Re^2$ 上连续，交换累次积分顺序

$$\int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3．设函数 $f(x,y)$ 在 $\Re^2$ 上连续，将直角坐标系下的累次积分化为极坐标系下的累次积分：

$$\int_0^{\frac{R}{2}} dx \int_0^{\sqrt{3}x} f(x,y)dy + \int_{\frac{R}{2}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4．锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $(x-2007)^2+(y+2008)^2=4$ 所截的面积等于____________

5．$\int_{L^+} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$________________,其中 $L^+ : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，逆时针为正

6．已知 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\iint_S x^2 dS=$___________________

7．设 L 为曲线 $x^2+y^2=2x(y\ge 0)$，则 $\int_L \sqrt{2-x}dl=$___________________

8．设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧的一部分，不与坐标面相交，则 S 上的点 (x,y,z) 的外测单位法向量是___________________;如果 S 的面积等于 A，则

$$\iint_s \frac{dy\wedge dz}{x}+\frac{dz\wedge dx}{y}+\frac{dx\wedge dy}{z}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

9. 如果平面向量场 $\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{\lambda} i-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda} j$ 为半平面 $y>0$ 的保守场，那么 $\lambda=$_____

10．设 $A(x,y,z)=xyi+e^{yz}j+\sin(zx)k$，则 $divA(x,y,z)=$_______________

11．设常微分方程 $y''+(\cos x)y'+(\sin x)y=\sin 2x$ 有三个线性无关解 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$，则常微分方程 $y''+(\cos x)y'+(\sin x)y=0$ 的通解是_________________________

12．一阶常微分方程组$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$的通解为____________________

13．全微分方程$(x+2y)dx + (2x-y)dy = 0$的通解为____________________

14．设Ω是由锥面$z = \sqrt{x^2+y^2}$与平面$z = h$所围的闭区域，这里$h > 0$，则三重积分

$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz =$____________________

二、计算题（每题 10 分，共 40 分）

1．计算二重积分$\iint\limits_{D} \left|x - y^2\right| dxdy$，其中$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\right\}$。

2．已知$\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$，求$\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(x^2+a^2)}{1+x^2} dx$的值$(0 \le a < 1)$。

（不必讨论广义含参积分的一致收敛性）

3．计算第二类曲面积分$\iint\limits_{S^+} (2y+z) dz \wedge dx + z dx \wedge dy$，其中 S^+ 为有向曲面

$z = x^2 + y^2, (0 \le z < 1)$，法向量与 z 轴正向夹角为锐角。

4．设二阶连续可微函数$f(x)$满足$f(1) = -2, f'(1) = 1$，若对于右半平面$\left\{(x,y) \mid x > 0\right\}$内任意简单光滑曲线 L 恒有$\oint\limits_{L} 2yf(x)dx + x^2 f'(x)dy = 0$, 求$f(x)$

三、证明题

1．（8 分）考虑二阶线性方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 8\dfrac{dx}{dt} + 7x = f(t)$，其中$f(t) \in C(-\infty, +\infty)$且满足

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$。

（i）求该方程的通解（可用常数变易法）;（ii）证明该方程的每个解$x(t)$满足$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$。

2.（7 分）设函数$f(x,y) \in C^2(\Re^2)$，且满足$f''_{xx}(x,y) + f''_{yy}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, \forall (x,y) \in \Re^2$

证明：（i）$\oint\limits_{\Gamma_r} \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{n}} dl = \pi(1 - e^{-r^2})$, 其中$\Gamma$为圆周：$x^2 + y^2 = r^2$，逆时针为正向，$\mathbf{n}$为$\Gamma_r$的外法向量，$r > 0$；

（ii）$\iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} \left[x f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\right] dxdy = \dfrac{\pi}{2e}$