清华大学本科生考试试题专用纸

微积分Ⅲ期终考试 A卷　　　　　　2006年 1 月8 日

姓名________________ 学号________________ 班级_____________

一、填空题（每空题3分，共39分）

1. 曲面$x^2+y^2-z=1$在点$(-1,-1,1)$的切平面方程是$\underline{2x+2y+z+3=0}$.

2. 设f为连续可微函数，$f'(1)=2$. 令$g(x,y,z)=f(x^2yz)$，则$\nabla g(1,1,1)=\underline{\quad(4,2,2)\quad}$。

解：$g'_x(1,1,1)=4$，$g'_y(1,1,1)=2$，$g'_z(1,1,1)=2$. $\nabla g(1,1,1)=(4,2,2)$

3. 设S为球面$x^2+y^2+z^2=4$上的不与坐标轴相交的一片，则S上的点(x,y,z)的外侧单位法向量是$\underline{\dfrac{(x,y,z)}{2}}$；如果$S$的面积等于$A$，则

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{z}=\frac{3}{2}S.$$

解：$\vec{v}=\dfrac{\vec{i}}{x}+\dfrac{\vec{j}}{y}+\dfrac{\vec{k}}{z}$，$\vec{n}=\dfrac{1}{2}(x,y,z)$. $\vec{v}\cdot\vec{n}=\dfrac{3}{2}$. 原积分$\iint_S\dfrac{3}{2}\mathrm{d}S=\dfrac{3}{2}S$.

4. 常微分方程$y''-2y'+5y=0$的通解为$\underline{y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)}$。

5. 设常微分方程$y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=\sin 2x$有三个线性无关解$y_1(x)$，$y_2(x)$和$y_3(x)$. 则微分方程$y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=0$的通解是$\underline{C_1(y_1(x)-y_2(x))+C_2(y_1(x)-y_3(x))}$.

6. 假设函数$y(t)$满足方程$y''+y'+y=1+\cos t$. 则$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{t}=\underline{0}$。

7. 设空间光滑曲面S的方程为$z=f(x,y)$，$x^2+y^2\le 2$，上侧为正. 其中函数$f(x,y)$有连续的偏导数. 则$\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\underline{2\pi}$。

解：$\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r=2\pi$.

8. 设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$，则三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$可以化成球坐标系下的累次积分$\underline{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho}$.

9. D是由曲线$y=\ln x$、直线$x=\mathrm{e}$，以及x轴围成的平面区域，则$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$.

解：$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}x\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$.

10. 锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$含在柱面$(x-2007)^2+(y+2008)^2=4$内部的面积等于$\underline{4\sqrt{2}\pi}$。

11. 设L为曲线$x^2+y^2=2x\ (y\ge 0)$，则$\int_L\sqrt{2-x}\mathrm{d}l=$ $\underline{\ 2\sqrt{2}\ }$ 。

解 ：

$$\int_L\sqrt{2-x}\mathrm{d}l=\int_0^2\sqrt{2-x}\sqrt{1+\frac{1+x^2-2x}{2x-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{2-x}\sqrt{\frac{1}{x(2-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\Big|_0^2=2\sqrt{2}$$

二、解答题

12. （8分）Ω是锥面$x^2+y^2=z^2$与平面$z=2$围成的空间区域. 计算

$$\iiint_\Omega(2x-3y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解. 解法1：先一后二:

由对称性有

$$\iiint_\Omega(2x-3y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{.............} \qquad 2\text{分}$$

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 z\mathrm{d}z=\iint\limits_{r\le 2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_r^2 z\mathrm{d}z \quad \text{......} \quad \text{.................}\ 5\text{分}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_r^2 z\mathrm{d}z=\pi\int_0^2 r(4-r^2)\mathrm{d}r$$

$$=\pi(2r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^2=4\pi. \qquad \text{..........................}\ 8\text{分}$$

解法2：先二后一:

$$\iiint_\Omega(2x-3y2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{...........}\quad \text{..} \qquad 2\text{分}$$

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中D_z是区域$x^2+y^2\le z^2$， 5分

$$\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2 z^3\mathrm{d}z=4\pi \qquad \text{..........................}\ 8\text{分}$$

13. （10分）设S是抛物$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0\le z\le 1$. 在S任意点一点(x,y,z)的质量密度为$\sqrt{1+x^2+y^2}$. 求S的质心.

解.

求质量: $M=\iint_S \mathrm{d}m=\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}S$ 1分

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 3分

. $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(1+r^2)r\mathrm{d}r=4\pi$ 5分

静力矩

有对称性知道 $J_x=J_y=0$. 6分

$J_z=\iint_S z\mathrm{d}m=\iint_S z\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}S$ 7分

$=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 8分

$=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2(1+r^2)r\mathrm{d}r=\dfrac{7}{3}\pi$ 9分

质心的 z 坐标 $\bar{z}=\dfrac{J_z}{M}=\dfrac{7}{12}$. 10分

有同学理解成三重积分。如果质量和静力矩写到下面的结果:

$\bar{x}=0,\bar{y}=0,\bar{z}=\dfrac{J_z}{M}$.

$M=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{\frac{1}{2}r^2}^{1}\sqrt{1+r^2}dz$,

$J_z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{\frac{1}{2}r^2}^{1}z\sqrt{1+r^2}dz$

则可以得 8 分。其后视具体情形而定.

14. (10 分)如图, L 是有向光滑曲线, 起点为原点 O, 终点为 $A(2,2)$. 已知 L 与线段 $\overrightarrow{OA}$ 围成的区域 D 的面积等于 A. $f(t)$ 有连续导数. 计算曲线积分

$$\int_L (y^2\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x-4x)\mathrm{d}y$$

解: 根据格林公式得到

$$(\int_{\overrightarrow{OA}}-\int_L)[y^2e^x-2y]\mathrm{d}x+[2ye^x-4x]\mathrm{d}y=$$
$$\iint_D[(2ye^x-4)-(2ye^x-2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2A$$ 5分

于是

$\int_L [y^2e^x-2y]\mathrm{d}x+[2ye^x-4x]\mathrm{d}y=\int_{\overline{OA}} [y^2e^x-2y]\mathrm{d}x+[2xe^x-4x]\mathrm{d}y+2A$.........7分

对于后一个积分，取x为参数．$y=x$，$0\le x\le 2$．

$\int_{\overline{OA}} [y^2e^x-2y]\mathrm{d}x+[2ye^x-4x]\mathrm{d}y=\int_0^2(x^2e^x+2xe^x-6x)\mathrm{d}x=(x^2e^x-3x^2)\Big|_0^2=4e^2-12$ . . 10 分

15． (8 分)设 L 为平面 S：$x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分的边界，方向是 $A(1,0,0)\to B(0,1,0)\to C(0,0,1)\to A(1,0,0)$．空间有一个力场

$$\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-2z\vec{j}+6x\vec{k}.$$

求单位质点P在L上某点出发，绕L运动一周时，$\vec{F}$对于质点所做的功.

解：设S上侧为正．由斯托克斯公式，单位质点P在L上某点出发，绕L运动一周时，$\vec{F}$对于质点所做的功等于

$$\oint_L(y\vec{i}-2z\vec{j}+6x\vec{k})\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}l==\iint_S\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y&-2z&6x\end{vmatrix}\cdot\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S$$ ……. 3 分

$$=-\frac{5}{\sqrt{3}}\iint_S\mathrm{d}S$$ ………………………………………………………………6分.

$$=-\frac{5}{\sqrt{3}}\iint_{\substack{0\le x\le1\\0\le y\le1-x}}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{5}{2}$$ ……………………………………………………8分

16. (10 分)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数且$f(0)=f'(0)=1$. 又设对于空间R^3中的任意一张光滑的闭合曲面S，都有$\oiint_S f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$，求$f(x)$.

解：由题意，在任意一个由光滑简单封闭曲面围成的区域Ω上，由高斯公式有

$$\oiint_{\partial\Omega} f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_\Omega(f''(x)+f(x)-2e^x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$ . . . . 4 分

所以由Ω的任意性有

$$f''(x)+f(x)-2e^x\equiv 0$$ . . . . 7 分

即 $f(x)$ 满足常微分方程 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

齐次方程通解：$f=c_1\cos x+c_2\sin x$，非齐次方程特解 $y_*=e^x$．一般表达式

$f = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x$. …. １０分

17. (12 分)

① 设 δ 是任意一个正数，L 是圆周 $x^2 + y^2 = \delta^2$ (逆时针方向). 计算积分

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

② 如果将 L 换成不经过原点但环绕原点的光滑、简单的闭合曲线(逆时针方向). 计算上述积分.

③ 向量场 $\dfrac{(x+y)i-(x-y)j}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $x>0$ 有没有势函数？简述理由.

④ 设 L 为从 $A(2,0)$ 到 $B(4,4)$ 的有向线段，计算

$$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

解:

① 圆周参数方程: $x = \delta\cos t$, $y = \delta\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\delta^2(\cos t+\sin t)\sin t + \delta^2(\sin t - \cos t)\cos t}{\delta^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = -2\pi$$ ……… 4分

② 在 L 内部做圆周 $L_\delta : x^2 + y^2 = \delta^2$ (逆时针方向). 设 D 为 L 和 L_δ 包围的区域. 由格林公式得到

$$\left(\oint_L - \oint_{L_\delta}\right)\frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{y-x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{x+y}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

所以

$$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_{L_\delta} \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = -2\pi$$ ………. 8分

③ 右半平面是单连通区域，并且 $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{y-x}{x^2+y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. 所以在右半平面有势函数.

…. １０分

④　求得向量场 $\dfrac{(x+y)i-(x-y)j}{x^2+y^2}$ 的势函数为

$u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\dfrac{y}{x}$. 于是

$\int_{\overrightarrow{AB}}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=u(B)-u(A)=\dfrac{3}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$.　　　　　……… 12分

18.（6分）设 Ω 是圆域：$x^2+y^2<1$. $f(x,y)$ 在 Ω 上有连续偏导数，且处处满足方程

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.$$

求证 $f(x,y)$ 在 Ω 恒等于常数. 如果 Ω 是不包含原点的圆域，举例说明上述结论未必正确.

解：按照下列三个要点给分.

要点 1：由条件推出 $f(x,y)$ 沿径向 (x,y) 的方向导数恒等于零。

要点 2：进而推出 $f(x,y)$ 在过原点的任意直线上恒等于常数。

要点 3：$f(x,y)$ 在原点连续，又推出在所有直线上都相等。