2005 级多元微积分期末考题

2006.6.15

一、填空题（每空 3 分，共 15 空）

1．将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$，化为球坐标下的累次积分____

2．设 $\Omega=\left\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1, 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\right\}$，$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$，化为柱坐标的累次积分 I=____________________________

3．设 L 是有点 A（1，0）到点 B（0，1）的有向线段，则 $\int\limits_{L}(x+y)dl=$________________

$\int\limits_{L(A)}^{(B)}(2x-y)dx+(x-2y)dy=$________________________________

4．设 S 为单位球面，外侧为正，则 $\iint\limits_{S^+} z^2 dx\wedge dy=$__________; $\iint\limits_{S} z^2 dS=$______________

5．向量场 $\vec{A}(x,y,z)=(2x+y+z)\vec{i}+(x+2y+z)\vec{j}+(x+y+2z)\vec{k}$ 的旋度

$rot\vec{A}(x,y,z)$_________________________

6．向量场 $\vec{A}(x,y,z)=yz(2x+y+z)\vec{i}+zx(x+2y+z)\vec{j}+xy(x+y+2z)\vec{k}$ 的散度

$div\vec{A}(x,y,z)$_________________________

7．设 S^+ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$ 的上侧，

则 $\iint\limits_{S^+} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=$________________________________

8．当常数 $\alpha=$____时，积分 $\int_A^B (x^4+\alpha xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$ 与路径无关。此积分式 $(x^4+\alpha xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$ 的原函数为_________________________

9．设 L 为闭曲线 $|x|+|y|=2$，逆时针为正向，则第二类线积分

$\oint\limits_{L^+}\frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=$_________________________________

10．方程 $y''+y'=1$ 的通解 $y(x)=$_______________________

11．设 S 是三个坐标面与平面 $x+y+z=1$ 围成的四面体的外表面

$$\iint_{S^+} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

12．设二阶非齐次线性常微分方程有解 3 及 $3+x^2$，其对应的齐次线性常微分方程有解 e^x 则此非齐次线性常微分方程的通解为____________________________

二、计算题（每题 10 分，共四题）

1．计算 $I = \iint_{S^+} (x+z)dy \wedge dz + 3zdx \wedge dy,$，其中 S^+ 为 $z = x^2 + y^2$ 在 $0 \le z \le 1$ 部分的外侧。

2．设 L 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去为逆时针方向，求第二类曲线积分 $\int_{L^+} \dfrac{(y+1)dx+(z+2)dy+(x+3)dz}{x^2+y^2+z^2}$

3．求二阶连续可微函数 $f(x)$ 使 $f'(0)=0$，且 $\left[f(x) + y(x - f(x)) \right] + f'(x)dy$ 为全微分，并使该微分式由 $A(0,0)$ 到 $B(\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ 沿逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\dfrac{\pi^2}{8}$

4．求常系数线性齐次常微分方程组 $\dfrac{d\overline{y}}{dx} = A\overline{y}$ 的通解，其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$。

三．证明题

1．（7 分）设齐次线性常微分方程组 $\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ 的系数 $a_{11}(x)$，$a_{12}(x)$，$a_{21}(x)$，$a_{22}(x) \in C(a,b)$，$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ 是方程组的两个线性无关解，证明其 wronsky 行列式 $\begin{vmatrix} y_1(x) z_1(x) \\ y_2(x) z_2(x) \end{vmatrix}$ 满足 $W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} [a_{11}(t) + a_{22}(t)]dt \right)$

其中 $x_0 \in (a,b)$ 为常数，$x \in (a,b)$。

2.（8 分）设 $B = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2 \right\}, u \in C^2(B)$ 是 B 上的调和函数，即 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，记 $L_\rho : x^2 + y^2 = \rho^2$ 是半径为 $\rho(\rho < R)$ 的圆周。

求证：（1）$\int_{L_\rho} \dfrac{\partial u}{\partial n} dl = 0$;(2)定义 $f(\rho) = \dfrac{1}{2\pi\rho} \oint_{L_\rho} u(x,y)dl$，则 $f(\rho) \equiv u(0,0), 0 < \rho < R$。

（提示：利用（1）证明 $f'(\rho) \equiv 0$）