

微 II 模拟试题解答

一、**填空与判断题** (每题 3 分, 共 30 分): 填空题: 将答案写在相应的横线上;
 判断题: 在你认为正确的论述后面括号内画“√”、错误的画“×”。

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n+1}$ 的收敛区间是 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
2. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n^p})$ 收敛, 则 p 的取值范围是 $p > \frac{1}{2}$
3. 设函数 $f(x)$ 的周期是 2π , 且 $f(x) = x (0 \leq x \leq 2\pi)$, 函数 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数, 则 $S(0) = \pi$, $S(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$
4. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} x^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-2)^n$ 的收敛区间 (1,3)
5. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \sin \frac{1}{n}$, 则使该级数收敛的 a 的范围是 $a < 0$
6. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$ 的敛散性 (收敛)
7. 发散的交错级数, 其同项必不趋于 0. [×]
8. 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq e^{\frac{x^2}{2}}$. [√]
9. 设 a 是函数 $f(x)$ 的瑕点, 则必有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. [×]
10. 数列 $\{a_n\}$ 有界的充要条件是其任一子列都有收敛的子列. [√]

二、解答证明题 (共 70 分): 应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

1. (12 分) 求下列幂级数的收敛半径及收敛域。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n^2} x^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} x^{n-1}.$$

(1) 解: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})^{-n^2}} = \frac{1}{e}$, 所以收敛半径是 e . 当 $x = e$ 时, 级数为

$\sum_{n=1}^{\infty} [e(1+\frac{1}{n})^{-n}]^n$. 因为 $e(1+\frac{1}{n})^{-n} > 1 (n=1, 2, \dots)$ 所以级数的同项不趋于零, 从而级数

在 $x=e$ 点发散; 同理在 $x=-e$ 处, 级数发散. 所以收敛域是 $(-e, e)$.

(2) 解: 由比值法可求得收敛半径为 1. 当 $x=1$ 时, 相应级数的敛散性可以用积分判别法判别.

由于 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, x \geq 1$ 是非负递减的, 且 $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ 发散, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n}$ 发散.

(法二) 比较法: 由于 $\frac{1}{n} < \frac{\ln(1+n)}{n} (n > 3)$, 故发散. 当 $x=-1$ 时, 由莱布尼茨判别法知, 级数收敛. 故收敛域为 $[-1, 1)$.

2. (7 分) 将函数 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 点展开为幂级数.

解法一: $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} (|x| < 1), f(0) = 0,$

因此 $f(x) = \int_0^x f'(t) dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} (|x| < 1).$

解法二: 令 $t = \operatorname{arctg} x$, 则当 $|x| < 1$ 时, $|t| < \pi/4$, 于是

$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2t \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2t) = 2t = 2 \operatorname{arctg} x (|x| < 1).$ 利用 $\operatorname{arctg} x$ 在 $x=0$ 展开的

幂级数, 即得 $f(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} (|x| < 1).$

3. (16 分) (1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛域及其和函数.

解: 用根式法可求得收敛半径是 $\sqrt{2}$. 当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, 原级数发散, 故收敛域是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} = \left(\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{2n-2} \right) dt \right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \int_0^x t^{2n-2} dt \right)' \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} \right)' = \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n \right)' = \left(\frac{x}{2-x^2} \right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2} \quad (x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})). \end{aligned}$$

(2) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$ 的和。

解：考查幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$

记 $u_n = \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{4n+1} x^4 = x^4$ ，从而收敛半径为 $R=1$ 。

当 $x=1$ 时，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$ 是莱布尼茨级数，从而收敛；

当 $x=-1$ 时，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n+1}$ 是莱布尼茨级数，从而收敛。

综上，此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$ 。

令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n+1} x^{4n+1}$ ， $x \in [-1,1]$ ，则

当 $x \in (-1,1)$ 时， $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$ ，

于是 $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4} + f(0) = \int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt$ ， $x \in (-1,1)$

由于 $\int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，因此

$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt$ ， $x \in [-1,1]$ ，

从而，当 $x=1$ 时该幂级数的值为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = f(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^4} dt = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(1+\sqrt{2}).$$

4. (14分) 求证：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛但不一致收敛。

证明：(1) 固定 $x \in [0,1]$ ，序列 $(1-x)x^n$ 单调下降且趋于零，由交错级数的余项估计式得

$$|S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k (1-x)x^k \right| \leq (1-x)x^n.$$

再求函数 $u_n(x) = (1-x)x^n$ 的最大值。

令 $u'_n(x) = 0$, 解出 $x = \frac{n}{n+1}$. 所以 $|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{1+n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{n+1}$, 故

$\sup_{0 \leq x \leq 1} |S(x) - S_n(x)| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故原级数在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $S_n(x) \rightarrow S(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$ 所以级数收敛; 由于和函数不连续, 故级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛。

(法二) 因为 $\sup_{0 \leq x \leq 1} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{0 \leq x \leq 1} x^n = 1 \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 所以级数不一致收敛。

(法三)

解: $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (1-x)x^k = (1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}$

$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{若 } x = 1 \end{cases}$

取 $\varepsilon_0 = 1/4$, 对任意的 n , 取 $x = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$, 就有

$|S_n(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}) - S(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}})| = |\frac{1}{2} - 1| > \varepsilon_0$,

因此 $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 但不一致收敛。

5. (9分) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) \quad (0 \leq x \leq \pi)$.

证明: 将 $f(x) = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$ 作偶开拓, 并求傅立叶系数:

$a_0 = -\frac{\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{1}{n^2}$. 由于 $f(x)$ 连续且逐段光滑, 因此当 $0 \leq x \leq \pi$ 时,

$-\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x)$,

由此可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) \quad (0 \leq x \leq \pi)$.

6. (12分) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}, \quad x \in (0, +\infty)$.

(1) 证明此级数在 $(0, +\infty)$ 内收敛, 但不一致收敛.

(2) 求级数的和函数.

证明: (1) 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 由根式判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 收敛。

对任意的自然数 n , 可取 $x_n = \frac{1}{n}$, 则 $u_n(\frac{1}{n}) = ne^{-1} \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 故 $u_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于零, 从而级数不一致收敛。

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx}$ 逐项求导后得 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. 因为对任意的 $x \in [\delta, +\infty)$

($\delta > 0$), 有

$ne^{-nx} \leq ne^{-n\delta}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n\delta}$ 收敛, 所以在 $[\delta, +\infty)$ 上 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 一致收敛。对任意

的 $x_0 \in (0, +\infty)$, 取 $\delta = \frac{x_0}{2}$, 由于在 $[\delta, +\infty)$ 上 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 一致收敛, 因此在 x_0 处级数

$\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx}$ 可逐项求导, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx} = \frac{-e^{-x}}{1-e^{-x}}$, 所以

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-nx})' = (\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx})' = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}。$$

解法二: 令 $y = e^{-x}$, 则 $y \in (0, 1)$, 求出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ny^n = \frac{y}{(1-y)^2}$, 将 $y = e^{-x}$ 代入

即可。