

微积分 (2) 期末考题 (A) 答案

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 空) (请将答案直接填写在横线上!)

1. 交换累次积分次序 $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx =$ _____。

答案: $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$

2. 设曲线 L 的参数方程为 $x = 1 - \sin t$, $y = 1 - \sqrt{2} \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, 则第一类曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2 - 2x + 2} dl =$ _____。

答案: 3π

3. 设 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则 $\iint_S (x+1)^2 dS =$ _____。

答案:
$$\begin{aligned} \iint_S (x+1)^2 dS &= \iint_S (x^2 + 1) dS = \iint_S (x^2 + 1) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS + \iint_S dS = \frac{16}{3} \pi \end{aligned}$$

4. $\vec{V}(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$, 则 $\operatorname{div} \vec{V} =$ _____。

答案: $1 + x + z + xy$

5. $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, 则 $\operatorname{grad} f =$ _____, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) =$ _____。

答案: $e^{x+y+z}(1, 1, 1)$, $\mathbf{0}$

6. 设函数 $f(x) = x^2 + x + 2$ 在 $[0, 2)$ 上的 Fourier 展开为

$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$, 则 $S(0) =$ _____。

答案: 5

7. 三重积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^{99} y^{100} z^{101} dx dy dz =$ _____。

答案: 0

8. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ 的和为 _____。

答案: $(e^2 - 3)/2$

9. 函数 $\frac{1}{1-x}$ 在 $x_0 = 2$ 点的 Taylor 级数为_____。

答案: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n$

10. 曲线积分 $\int_{L^+} \frac{x^2 dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$ 对上半平面的任意光滑闭曲线 L 都成立, 则常数

$\lambda =$ _____。

答案: 1

11. S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 则

$\oiint_{S^+} x dy \wedge dz + \cos y dz \wedge dx + dx \wedge dy =$ _____。

答案: $\frac{4}{3}\pi$

12. 函数 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 在 $x_0 = 0$ 点的幂级数展开为_____。

答案: $x - \frac{1}{3 \cdot 3!} x^3 + \frac{1}{5 \cdot 5!} x^5 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n-1)!} x^{2n-1} + \dots$

13. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=3$ 处收敛, 且当 $x < 3$ 时发散, 则 $a =$ _____。

答案: 4

14. 设 $D = \{ (x, y), 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 \}$, 则 D 的形心横坐标 $\bar{x} =$ _____。

答案: $\frac{3}{8}$

二. 计算题 (每题 10 分, 共 40 分)

1. 设 S^+ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧, 求 $\iint_{S^+} (x+y) dy \wedge dz + (2y-z) dz \wedge dx$ 。

解: 加平面: $S_1^+ : z=1, x^2 + y^2 \leq 1$, 上侧为正,

$$\iint_{S^+ + S_1^+} (x+y) dy \wedge dz + (2y-z) dz \wedge dx = 3 \iiint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1} dx dy dz = \pi$$

$$\iint_{S_1^+} (x+y)dy \wedge dz + (2y-z)dz \wedge dx = 0$$

故 $\iint_{S^+} (x+y)dy \wedge dz + (2y-z)dz \wedge dx = \pi$ 。

2. 求两个球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 、 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$ 相交部分的体积。

解：建立直角坐标系，使得两个球体可表为：

小球： $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ，大球： $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$ 。于是两个球面的交线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{解之得} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 15/16 \\ z = 1/4 \end{cases} \quad \text{于是所求立体体积为}$$

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 15/16} (z_1(x,y) - z_2(x,y)) dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq 15/16} [\sqrt{1-x^2-y^2} - (2-\sqrt{4-x^2-y^2})] dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 15/16} (\sqrt{1-x^2-y^2} + \sqrt{4-x^2-y^2}) dx dy - 2\pi \cdot 15/16 \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{15}/4} (\sqrt{1-r^2} + \sqrt{4-r^2}) r dr - \frac{15\pi}{8} \\ &= \pi \int_0^{15/16} (\sqrt{1-s} + \sqrt{4-s}) ds - \frac{15\pi}{8} = \frac{13\pi}{24} \end{aligned}$$

3. 设 $f(x) = \sin^2(x^2)$,

(I) 求 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 点的幂级数展开；

(II) 求 $f^{(n)}(0)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

解：(I) $f(x) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x^2)] = \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{2^2}{2!} x^{2 \cdot 2} + \frac{2^4}{4!} x^{2 \cdot 4} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{4n} + \dots \right) \right]$

$$= \frac{2}{2!} x^{2 \cdot 2} - \frac{2^3}{4!} x^{2 \cdot 4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{4n} + \dots$$

(II) $f^{(4n)}(0) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} \cdot (4n)!}{(2n)!}$

$f^{(m)}(0) = 0$, m 不能被 4 整除。

4. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$ ($x > 0$)，求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$ 。

解：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\ln 2, \ln 3]$ 一致收敛，故

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

三. 证明题

1. (8分) (I) 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的定义为 $f(x) = \cos \alpha x$ (α 不是整数),

将其展成 Fourier 级数 (提示: $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$);

(II) 利用 (I) 证明: $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$, $x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

解: (I)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\alpha - n)x + \cos(\alpha + n)x] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\alpha - n)\pi}{(\alpha - n)} + \frac{\sin(\alpha + n)\pi}{(\alpha + n)} \right] = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right], \quad x \in [-\pi, \pi]$$

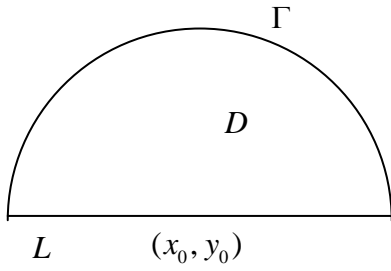
(II) 令 $x = \pi$, $\cot \alpha \pi = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right]$, 在令 $\alpha \pi = x$, 则

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. (7分) 设函数 $P(x, y), Q(x, y) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$, 在以任意点 (x_0, y_0) 为中心, 任意正数 r 为半径的上半圆周 Γ 上的第二类曲线积分 $\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 。求证: 在 \mathbb{R}^2 上有

$$P(x, y) \equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \equiv 0.$$

证明:



加上直径 \$L\$, 记半圆域为 \$D\$。

$$\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma+L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \end{aligned}$$

由 Green 公式,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{(\xi, \eta)} \frac{1}{2} \pi r^2 \end{aligned}$$

其中 \$(\xi, \eta)\$ 为 \$D\$ 中一点。而

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x, y_0)dx = P(\zeta, y_0)2r$$

其中 \$\zeta \in (x_0 - r, x_0 + r)\$。两者相等,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{(\xi, \eta)} \frac{1}{2} \pi r^2 &= P(\zeta, y_0)2r \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{(\xi, \eta)} \frac{1}{2} \pi r &= 2P(\zeta, y_0) \end{aligned}$$

令 \$r \rightarrow 0\$, \$P(x_0, y_0) = 0\$。由 \$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\$ 的任意性, \$P(x, y) \equiv 0\$, \$(x, y) \in \mathbb{R}^2\$。

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2。$$