多元微积分期末考题　答案

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. $\ln\dfrac{b}{a}$；
2. $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-x^2} f(x,y)dy$；
3. $\dfrac{32}{9}$；
4. $\dfrac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})$；
5. 4π
6. $-\pi$
7. 1
8. $xe^y - y^2 = C$；
9. 0;
10. $\dfrac{\pi}{2}$；
11. $4\pi a^3$；
12. $(xz,-yz,0)$
13. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x}$；
14. $x = C_1 + C_2e^{2t}, y = -C_1 + C_2e^{2t}$
15. $y = C_1x + C_2x^{-2}$

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)dz$ ……………………(5 分)

$=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………(5 分)

2. 设 S^+ 为平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1$ 被柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所截部分，上侧为正，则

$\oint\limits_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz = \iint\limits_{S^+}(-2,-2,-2)\cdot dS$ ……………………(5 分)

$=\iint\limits_{S}(-2,-2,-2)\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{a},0,\dfrac{1}{b}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}dS = -2\dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint\limits_{S}dS = -\dfrac{2(a+b)}{a}\pi R^2$ ……………(5 分)

3. $div\left(\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=0$，故

$$\iint_{S^+}\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{S_1^+}\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot d\mathbf{S}$$ ……………(5 分)

其中$S_1:x^2+y^2+z^2=1$，内侧为正。

$$\iint_{S_1^+}\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{S_1^+}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S}=-3\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}dxdydz=-4\pi$$ ……………(5 分)

4. 由题设

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)=\frac{\partial}{\partial y}2(x\varphi(y)+\psi(y))$$ ……………….(3 分)

即 $2x\psi(y)+2y^2-2\varphi(y)=2x\varphi'(y)+2\psi'(y)$ 对任意的(x,y)都成立。

令 $x=0$， 有 $\varphi(y)+\psi'(y)=y^2$， ………………（2 分）

代入上式得到

$$\psi(y)=\varphi'(y)。$$ ………………（2 分）

则 $\varphi''(y)+\varphi(y)=y^2$。

其通解为$\varphi(y)=C_1\cos y+C_2\sin y+y^2-2$。

由初始条件 $\varphi(0)=-2,\psi(0)=\varphi'(0)=1$， 解得 $C_1=0,C_2=1$。 故

$\varphi(x)=\sin x+x^2-2$； $\psi(x)=\cos x+2x.$ ………………..（3 分）

三．证明题

1. 证明：只要证明如下等式即可。

$$\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy=\int_0^1 f(x)dx\int_0^x f(y)dy$$ （*）

因为若式（*）成立，则$2\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy=\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy+\int_0^1 f(x)\int_0^x f(y)dy$

$=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$。以下证（*）. ……………………………（3 分）

交换累次积分$\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy$的次序可知$\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy=\int_0^1 f(y)dy\int_0^y f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx\int_0^x f(y)dy$。即式（*）成立。 ………………………………（4 分）

另解：令$F(x)=\int_x^1 f(y)dy$，则$F'(x)=-f(x)$。于是我们有

$$2\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy=-2\int_0^1 F'(x)F(x)dx=-F(x)^2\Big|_{x=0}^{x=1}=F(0)^2=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2。$$

2．证明：（I）$\iint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\iint_{\partial\Omega^+} v(gradu)\cdot dS=\iiint_{\Omega} div(v(gradu))dxdydz$

$$=\iiint_{\Omega} v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydz+\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz$$

………………………………（4 分）

（II）在上式中，令$u=v$，则

$$\iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\iiint_{\Omega} u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydz+\iiint_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)dxdydz,$$

若$u(x,y,z)$为调和函数，即$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，且$u(x,y,z)\big|_{\partial\Omega}=0$，

$$\iiint_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)dxdydz=0$$

故 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=0$，$u=$常数，由$u(x,y,z)\big|_{\partial\Omega}=0$，

$$u(x,y,z)\equiv 0,\forall(x,y,z)\in\Omega$$

………………………………（4 分）