清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 2 (A)　　　　　　2005 年 6 月 20 日

姓名________________ 学号________________ 班级_____________

一、**选择题**（每小题 4 分，共 2 0 分）

1．设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n-\frac{1}{n})$ [B]

A. 绝对收敛；　*B.* 条件收敛；　*C.* 发散；　*D.* 不能确定

2．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$ 在点 $x_0=-3$ 收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ [A]

A. 绝对收敛；　*B.* 条件收敛；　*C.* 发散；　*D.* 不能确定

3．设 $\{x_n\}$ 是一个数列，n, p 是任意自然数．下列哪一个条件可以推出 $\{x_n\}$ 是柯西列？[C]

A. $|x_{n+p}-x_n|<\frac{n+p}{n^2}$；　*B.* $|x_{n+p}-x_n|<\frac{\ln p}{n^2}$；

C. $|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{\sqrt{n+p}}$；　*D.* $|x_{n+p}-x_n|<\frac{np}{n^2+p^2}$．

4．若瑕积分 $\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\ln x\mathrm{d}x$ 收敛，则 α 和 β 的取值范围是 [D]

A. $\alpha>-1,\beta>0$；　*B.* $\alpha>0,\beta>0$；　*C.* $\alpha>-2,\beta>-1$；　*D.* $\alpha>-1,\beta>-2$

5．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 存在二阶导数，且 $f(0)=1$，$f'(0)>0$，$f''(x)\le -c<0$（其中 c 是一个正数）．则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的零点个数为 [B]

A. 2；　*B.* 1；　*C.* 0；　*D.* 3

二、**填空题**（每小题 4 分，共 2 0 分）

6．若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-2,2)$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{2n}$ 的收敛域为 [$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$]

7．设 $f(x)=x+2\ (-\pi<x\le\pi)$，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数．则

$a_{2006}=$ [0]

8．设 $f(x)$ 是周期等于 2 的函数，在区间 $(-1,1]$ 的表达式为 $f(x)=2^x+x^2$．其傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$ 的和函数为 $S(x)$，则 $S(1)$ 等于 [$\frac{9}{4}$]

9．已知 $\int_1^{+\infty}(\mathrm{e}^{x^{-2p}}-1)\mathrm{d}x$，收敛，则正数 p 的取值范围是 [$p>\frac{1}{2}$]

10．设 $f(x)$ 为可导函数，$f(a)=1$，$f(b)=-1$．若函数列 $\varphi_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$ 在区间 $[a,b]$ 一致收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=$ [-2]

三、解答题（共 60 分）

11．(12 分)用比阶判别法证明反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，然后计算．

解：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

对于 I_1，$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot f(x)=1$，所以收敛；

对于 I_2，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}f(x)=0$，所以收敛；

结论：原积分收敛。

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sqrt{x}}\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x}}\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\pi$$

12．(10 分)写出 $\ln(1-\frac{x^2}{2})$ 的马克劳林级数（即 $\ln(1-\frac{x^2}{2})$ 在点 $x_0=0$ 的泰勒级数)，求这个幂级数的收敛域．

解：$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$$\ln(1-\frac{x^2}{2})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$$

幂级数的收敛半径等于 1．

当 $x=\pm1$ 时，幂级数均发散，所以幂级数为．

13．(10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n$ 的收敛域，并求该幂级数的和函数．

解：

幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n$ 的收敛半径为 1，收敛区间和收敛域均为 $(-1,1)$．

求和方法 1：

$$(\frac{1}{1-x})' = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)''$$
，

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$
.

于是

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = x^2\frac{2}{(1-x)^3}$$
.

求和方法 2：

令 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = x^2 S(x)$，则

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\int_0^x t^{n-2}\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = S_1(x)$$

$$\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (n+1)t^n\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x} = -(1+x)+\frac{1}{1-x}$$
.

于是

$$S(x) = [-(1+x)+\frac{1}{1-x}]'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$
，

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2 S(x)\ S(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$
.

14．(12 分)设 a 为任意正数.

（1）求函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}$ 的收敛域;

（2）对任意正数 a，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}$ 在区间 $[-a,a]$ 一致收敛,指出该函数级数和函数的连续区间.

解：

(1) $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}$ 是正项级数，根据比值判别法得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^2}{1+x^2} < 1$$
，所以级数收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

(2) $$[\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}]' = \frac{2nx^{2n-1}(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^n} > 0$$
.

所以 $u_n(x)$ 在 $[0,a]$ 单调增加，在 $[-a,0]$ 单调减少

于是

$$\max\{u_n(x)\,|\,-a\le x\le a\} = u_n(a) = \frac{a^{2n}}{(1+a^2)^n} < 1$$
.

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(1+a^2)^n}$ 收敛，于是根据比较判别法推出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}$ 在区间 $[-a,a]$ 一致收敛.

和函数在$[-a,a]$连续，由于正数a的任意性，推出函数在$[-\infty,+\infty]$连续。

15．(8 分)假设$F(x)$在区间$[a,b]$存在黎曼可积的导数$f(x)$．求证$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$．

解：由微分中值定理，

$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\ (i=1,2,\cdots,n)$．（其中$\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$）.

于是

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

当$n\to\infty$时，$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\to\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，所以由上式得到

$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．

16．(8 分)假设正值函数$f(x)$以π为周期，$f(x)$在区间$[0,\pi]$黎曼可积．令$a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{f(x)\sin x}{x+1}\mathrm{d}x$（$n=1,2,\cdots$），求证级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是收敛的交错级数.

解：注意到$f(x)\sin x$在$[n\pi,(n+1)\pi]$可积不变号，$\frac{1}{x+1}$在$[n\pi,(n+1)\pi]$连续．由推广的积分中值定理得到

$$|a_n|=|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{f(x)\sin x}{x+1}\mathrm{d}x|=\frac{1}{\xi_n+1}|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x|=\frac{1}{\xi_n+1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)|\sin x|\mathrm{d}x.$$

由函数周期性推出

$$|a_n|=\frac{1}{\xi_n+1}\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$$

容易看出$|a_n|$单调减少趋向于零.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$显然是交错的，于是由莱布尼茨判别法推出$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.