附录 2：微积分 A(2)期末试题

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（请将答案直接填写在横线上！）

1．向量值函数 $\boldsymbol{F}=(x^2+z, xy, z^2+y)$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=$ ________。

$y+ze^{yz}+x\cos(zx)$

2．向量值函数 $\vec{F}=(1-y^2, x-2z, yz)$ 的旋度 $rot\ \vec{F}=$ ________。

$(z+2, 0, 2y+1)$

3．交换积分次序：$\int_0^1 dx\int_0^2 f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{\log_2 x}^2 f(x,y)dy$ $=$ ________。

$\int_0^2 dy\int_0^{2^y} f(x,y)dx$

4．由曲线 $x+y=1, x+y=2, x-2y=0, x-2y=3$ 围成的区域面积为________。

1

5．设 Ω 为单位球 $x^2+y^2+z^2\le 1$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}[x^2+\sin(y^3e^{z^2})]\mathrm{d}V$ $=$ ________。

$\dfrac{4\pi}{15}$

6．设 L 是由点 $A(-1, 0)$ 到点 $B(1, 2)$ 的直线段，则 $I=\int_L (x+2y)dl=$ ________。

$4\sqrt{2}$

7．设 S 为平面 $x+y+z=1$ 包含在第一卦限中的部分，则 $\iint\limits_S \dfrac{dS}{(1+x+y)^2}$ $=$ ________。

$\sqrt{3}(\ln 2-1/2)$

8．全微分方程 $\left(3x^2+2xy^3\right)dx+\left(3x^2y^2-2y\right)dy=0$ 的通解为________。

$x^3+x^2y^3-y^2=C$

9．求级数的和：$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $=$ ________。

1/2

10．判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{n^{-2}}-1)$ 的敛散性：________。（填收敛或发散）。

收敛

11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{(2n-1)}$ 的收敛域为__________。

$[-1,1)$

12. $\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$ 在 $x_0=0$ 处的 Taylor 级数为______________。

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)\cdot(2n)!}$

13. 将 e^x 在区间 $(-1,1)$ 上的函数展成周期为 2 的 Fourier 级数，记 $S(x)$ 为此级数的和函数，

则 $S(5)=$__________。

$\frac{1}{2}(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}})$

14. 将函数 $f(x)=x^2$，$x\in[0,\pi]$，展开成周期为 2π 的正弦级数：$\sum_{k=1}^{+\infty}b_n\sin nx$，则 $b_2=$

_____________。

$-\pi$

15.　设 L^+ 为有向曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=0\end{cases}$，从 z 轴正向看去，逆时针方向为正方向。则第二类

曲线积分 $\int_{L^+}2z\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y+(x+2y)\mathrm{d}z=$__________。

$(\sqrt{2}\pi)$

二.　　计算题（每题 10 分，共 4 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

1. 设 $\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 9, y-3\le z\le 0\}$，曲面 S^+ 是 Ω 的外表面，取外侧为正侧。

试计算曲面积分 $I=\oiint_{S^+}yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+2y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

解：应用 Gauss 公式，

$$I=\iiint_\Omega 4ydV=\iint_{x^2+y^2\le 9}dxdy\int_{y-3}^{0}4ydz=\iint_{x^2+y^2\le 9}(12y-4y^2)dxdy=-81\pi$$

2. 求 $f(x)=\ln(x^2-8x+20)$ 在 $x_0=4$ 点处的 Taylor 级数，求其收敛半径与收敛域.

解：　$f(x)=\ln(x^2-8x+20)=\ln[4+(x-4)^2]=\ln 4+\ln[1+(\frac{x-4}{2})^2]$

$$=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^{2n}}{n2^{2n}}$$

收敛半径 $R=2$，收敛域为区间 $[2,6]$

3. 设 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上连续，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{1}{2\pi}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad ,$$

求 $f(x,y)$.

解： 记 $C=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则有

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{C}{2\pi} \qquad (*)$$

注意 D 的面积为 π，对（*）式两端在 D 上积分得

$$C=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{C}{2}$$

D 可以表示为 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ |\theta|\le\pi$，于是

$$C=2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}$$

代入（*）式即得 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\dfrac{2}{3}$

4. 设 $f(x)$，$f(0)=0$，且曲线积分 $\int_{L^+} y[\mathrm{e}^x+2f(x)]\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上与路径无关。

(1) 求函数 $f(x)$；

(2) 若 L 是从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的光滑有向曲线，求 $I=\int_{L^+} y[\mathrm{e}^x+2f(x)]\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$。

解： (1) 由于曲线积分在 $\mathbb{R}^2$ 上与路径无关，从而 $y[\mathrm{e}^x+2f(x)]dx-f(x)dy$ 是全微分，故有

$$f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x=0$$

此方程的通解为 $f(x)=C\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x$，

而 $f(0)=0$，从而 $C=\dfrac{1}{3}$，$f(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x$。

(2) 由(1)进而得

$$y[\mathrm{e}^x+2f(x)]dx-f(x)dy=\frac{1}{3}y(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-2x})dx+\frac{1}{3}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-2x})dy$$

$$=d[\frac{y}{3}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-2x})]。$$

所以 $I=\int_L y[\mathrm{e}^x+2f(x)]dx-f(x)dy=\frac{y}{3}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-2x})\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{3}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-2})$

三.　证明题（请写出详细的证明过程！）

1（8 分）设数列 $\{a_n\}$ 单调下降且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}$ 收敛，求证：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛。

证明： 由 a_n 单调下降且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}=A$ 收敛可得，$\{a_{2n-1}\}$ 非负且收敛于 0。于是 $\{a_n\}$ 非负，并且 $\forall n\ge 1$，$0\le\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\le\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}\le A$，进而得

$$0\le\sum_{k=1}^{n}a_k\le 2A,\qquad \forall n\ge 1\ 。$$

所以（非负项）级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛。

2.(7 分) 设 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$，$f\in C^1(D)$，且 $f(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in\partial D$。求证：（1）$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（2）$|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y|\le\frac{2\pi}{3}\max\limits_{(x,y)\in D}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}$ 。

证明：（1）

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

$$=\int_0^2\left(yf(x,y)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}-\int_0^{\sqrt{4-x^2}}yf_y'(x,y)dy\right)dx$$

$$=-\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}yf_y'(x,y)dy=-\iint_D yf_y'(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ 。$$

（2） 与（1）同理可得，$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D xf_x'(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 。

所以 $|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y|=\frac{1}{2}|\iint_D[xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y|$

$$\le\frac{1}{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{[f_x'(x,y)]^2+[f_y'(x,y)]^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le\frac{1}{2}\max_{(x,y)\in D}\sqrt{[f_x'(x,y)]^2+[f_y'(x,y)]^2}\cdot\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\pi}{3}\max_{(x,y)\in D}\sqrt{[f_x'(x,y)]^2+[f_y'(x,y)]^2}\ 。$$