清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A(2) B卷 2022年4月16日 9:50-11:50

系名__________ 班级__________ 姓名__________ 学号__________

一、填空题（每空3分，共30分）

1. 曲面 $e^z = xy + yz + zx$ 在点 $(1,1,0)$ 处的切平面方程为____________.

2. 写出曲面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ 在点 $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ 处的一个单位法向量：____________.

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{xy} =$____________.

4. 设 $z = e^{x-y}\ln(x+y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) =$____________.

5. 设 $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2+xt}\,\mathrm{d}t$，则 $f'(0) =$____________.

6. 设 $z = x\sin(xy)$，则 $\mathrm{d}z(1, \frac{\pi}{2}) =$____________.

7. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3$. $g(x) = f(x, f(x,x))$，则 $g'(1) =$____________.

8. $(x+1)^{2y}$ 在点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为____________.

9. 可微函数 $z = f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿 $\vec{\mathrm{u}} = (-1,2)$ 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial \vec{\mathrm{u}}}(0,0) = 0$，沿 $\vec{\mathrm{v}} = (3,4)$ 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial \vec{\mathrm{v}}}(0,0) = 2$，则 $\mathrm{grad} f\big|_{(0,0)} =$____________.

10. 已知 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^v + u^3 \\ y = \mathrm{e}^u - v^3 \end{cases}$ 将点 $(u_0, v_0) = (1,0)$ 映为 $(x_0, y_0) = (2, \mathrm{e})$，则其逆映射 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 在点 $(x_0, y_0) = (2, \mathrm{e})$ 处的 Jacobi 矩阵的行列式 $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big|_{(x,y)=(2,\mathrm{e})} =$____________.

二、解答题（请写出详细的解答过程和必要的根据！）

11. （10 分）证明方程 $1+xy=\arctan(x+y)$ 在点 $(x_0,y_0)=(-1,1)$ 的邻域中确定了一个任意次连续可微的隐函数 $y=y(x)$，并求 $y'(-1)$ 和 $y''(-1)$.

12. （12 分）已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 试回答以下问题，并说明理由。

（1） 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(x,y)=(0,0)$ 处是否连续？

（2） 偏导数 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 是否存在？如果存在，求出它们。

（3） 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(x,y)=(0,0)$ 处是否可微？如果可微，求出这个微分。

13. （10 分）请用 Lagrange 乘子法求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$ 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值。

14. （8 分）已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，求 a,b 的值及 $f(x,y)$.

15. （10 分）求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)$ 的极值和值域。

16. （15 分）已知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, I(t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2}\mathrm{d}x, t\in[0,+\infty)$.

(1) 证明：$f(t,x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2}, & x\neq0, t\in\mathbb{R}\\ t, & x=0, t\in\mathbb{R}\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续。

(2) 证明 $I(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

(3) 证明 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导并计算 $I'(t)$.

(4) 求 $I(t), t\in[0,+\infty)$.

17. （5 分）已知函数 $f(x,y)$ 对每个变量 x,y 分别连续；且对每个固定的 x，函数 $f(x,y)$ 对变量 y 单调。求证：$f(x,y)$ 作为二元函数是连续函数。