考试课程 **微积分 A(2)** **(A 卷)** 答案

系名________ 班级________ 姓名________ 学号________

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（请将答案直接填写在试题纸横线上！）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{x^2+2}{x^2+y^2}}=$________。

2. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(2,1)$ 处的微分 $\mathrm{d}f=2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(2+2t,1+t)-f(2,1)}{t}=$________。

3. 若 $z=y^x$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,\mathrm{e})=$________。

4. 设 f 为可微且 $f'(0)=1$ ，则函数 $z(x,y)=xy+f(\dfrac{y}{x})$ 在点 $(1,0)$ 处的微分 $\mathrm{d}z=$________。

5. 从 $(u_0,v_0)=(2,1)$ 的邻域到 $(x_0,y_0)=(3,4)$ 的邻域中，向量值函数 $\begin{cases}x=u+v\\ y=u^2v^2\end{cases}$ 有可微的逆向量值函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(3,4)=$________。

6. 设函数 $f(u,v)\in C^{(1)}$，函数 $w(x,y,z)=f(x-y,x-z)$，则 $\operatorname{grad} w=$________。

7. 已知函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿**单位向量 $\mathbf{l}$** 的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(1,1)=0$ ，则 $\mathbf{l}=$________。

8. $\dfrac{1}{x+y}$ 在点 $(1,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为________。

9. 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\\ y=2\sin t+\cos t\\ z=1+\mathrm{e}^{3t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 所对应的点处的切线方程为________。

10. 曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 和曲面 $3x^2+y^2-z^2=0$ 的交线在点 $(1,-1,2)$ 处的法平面方程为________。

11. 曲面 $\mathrm{e}^z+xy-z=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的法线方程为________。

12. 已知 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2y^2+3z^2-2xy-z-7=0$ 确定的一个隐函数，则 $z=z(x,y)$ 的驻点 $(x_0,y_0)=$________。

13. 设 $I(y)=\int_y^{y^2}\mathrm{e}^{x^2y}\mathrm{d}x$，则 $I'(1)=$________。

14. $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________。

15. 所有2阶实数矩阵$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$组成一个4维线性空间$V$，定义向量值函数$\mathbf{f}:V\to V$，$\mathbf{f}(X)=X^2$，则$\mathbf{f}(X)$在$X_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$处全微分为____________________________。

填空答案

A1 e^2

B1 e^2

A2 5

B2 2

A3 2

B3 5

A4 $2\mathrm{d}y$

B4 $2\mathrm{d}y$

A5 2

B5 $\left(f_u'+f_v',\ -f_u',\ -f_v'\right)$

A6 $\left(f_u'+f_v',\ -f_u',\ -f_v'\right)$

B6 $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$或$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 一个即可

A7 $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$或$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 一个即可

B7 2

A8B8 $1-(x-1+y)+(x-1+y)^2+o((x-1)^2+y^2)$或$3-3(x+y)+(x+y)^2+o((x-1)^2+y^2)$

A9B9 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2+3t \end{cases}$ 或等价形式 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$

A10B10 $8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$或者 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

A11B11 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$

A12B12 $(0,0)$

A13B13 e

A14B14 0

A15B15 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}X+(\mathrm{d}X)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，或$\begin{pmatrix} 2\mathrm{d}x_{11} & \mathrm{d}x_{12} \\ \mathrm{d}x_{21} & 0 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}x_{11}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}x_{12}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}x_{21}$

二. 计算题（每题 10 分，共 4 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

16. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，回答以下问题：

(Ⅰ) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否连续，说明理由；

(Ⅱ) 函数 $f(x,y)$ 在原点处沿任意给定的方向 $u=(a,b)$ （$a^2+b^2=1$）的方向导数是否存在？若存在，求出这个方向导数，若不存在，说明理由；

(III) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否可微，若可微，求出这个微分，若不可微，说明理由。

解：(Ⅰ) 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处连续。这是因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，我们有

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\frac{|x||y|^3}{x^2+y^2}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}^3}{x^2+y^2}=x^2+y^2\to 0$$

(Ⅱ) 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处沿任意给定的方向 $u=(a,b)$ （$a^2+b^2=1$）的方向导数是存在且为零。理由如下.

$$\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\frac{t^4ab^3}{t^3(a^2+b^2)}=tab^3\to 0\text{，当 } t\to 0 \text{ 时。}$$

注：也可先按(III)中证得 $\mathrm{d}f\left(0,0\right)=0$，从而 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{I}}(0,0)=\mathrm{d}f_{(0,0)}(\mathbf{I})=0$。

(III) 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\frac{|x||y|^3}{x^2+y^2}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}^3}{x^2+y^2}=x^2+y^2=o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

因此函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微，

且 $$\mathrm{d}f\left(0,0\right)=0\text{。}$$

17. 已知方程 $2z-\mathrm{e}^z+1+\int_y^{x^2}\sin(t^2)\mathrm{d}t=0$ 在 $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$ 的某个邻域中确定了一个隐函数 $z=z(x,y)$。求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$。

解：$\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x\sin(x^4)$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=-\sin(y^2)$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=2-\mathrm{e}^z$，

代入 $(1,1,0)$ 得到 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,0)=2\sin 1$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,0)=-\sin 1$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)=1$。

因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)}=-2\sin 1,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)}=\sin 1$。

在恒等式 $F(x,y,z(x,y))=0$ 两边对 y 求导，得到

$$0=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin(y^2)+(2-\mathrm{e}^z)\frac{\partial z}{\partial y}$$

再对 x 求导，得到

$$0=-\mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+(2-\mathrm{e}^z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

或者对 $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$ 求导得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

代入 $(1,1,0)$ 得到，解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)=\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-2\sin^2 1=\cos 2-1$$

18. 设实数 $a\geq 0$，求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

解： 记 $I(a)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

因为 $\dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\right)=e^{-(a+1)x}$，且当 $a\geq 0$ 时，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a+1)x}\mathrm{d}x$ 一致收敛，

所以 $I'(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a+1)x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a+1}$。

又因为 $I(0)=0$，所以 $I(a)=\ln(a+1)$。

19. 设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$。

(Ⅰ) 求 f 在平面 R^2 所有极值；

(Ⅱ) 求 f 在曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 上的最大值和最小值。

解：(Ⅰ) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y$，$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$，解得全部驻点：$(0,0),(1,1)$。

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,$$

f 在 $(1,1)$ 处 Hesse 矩阵正定，所以 $f(1,1)=-1$ 为极小值；

f 在 $(0,0)$ 处，$AC-B^2=-9<0$，Hesse 矩阵非退化，既非正定又非负定，$(0,0)$ 不是极值点。

（也可从 $f(x,0)=x^3$ 知 $(0,0)$ 不是极值点。）

(Ⅱ) 曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 上，$x^2+y^2=1+xy\le 1+\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $x^2+y^2\le 2$。从而 $\{(x,y)\,|\,x^2-xy+y^2=1\}$ 是有界闭集。f 连续，在 $\{(x,y)\,|\,x^2-xy+y^2=1\}$ 上存在最大值和最小值。

用 Lagrange 乘子法，

考虑函数 $F(x,y,\lambda)=x^3+y^3-3xy-\lambda(x^2-xy+y^2-1)$。

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3y-\lambda(2x-y)=0 & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3x-\lambda(-x+2y)=0 & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=-(x^2-xy+y^2-1)=0 & (3)\end{cases}$$

……1 分（设辅助函数 F 及求导）

解得 $x=1,\quad y=1$ 或 $x=-1,\quad y=-1$

或 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4},\quad y=\frac{1\mp\sqrt{5}}{4}$

$f(1,1)=-1$，$f(-1,-1)=-5$，$f(\frac{1\pm\sqrt{5}}{4},\frac{1\mp\sqrt{5}}{4})=\frac{5}{4}$。

所以 $f(x,y)$ 曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 上的最大值为 $\frac{5}{4}$，最小值为 -5。

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

20. （8 分）设 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 连续，满足 $f(0)\ne -1$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$。

（I）证明存在 $t_0=1$ 的邻域 U 和 $x_0=0$ 的邻域 V 以及 $\mathrm{C}^{(1)}$ 函数 $g:U\to V$ 使得对任意 $(t,x)\in U\times V$，$\int_x^t f(u)\mathrm{d}u=x$ 当且仅当 $x=g(t)$。

（II）求 $g'(1)$。

（I）**证明**：令 $F(t,x)=\int_x^t f(u)\mathrm{d}u-x$。$F(1,0)=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u-0=0$，$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)=-f(0)-1\ne 0$，

所以根据隐函数定理存在 $t_0=1$ 的邻域 U 和 $x_0=0$ 的邻域 V 以及 C^1 函数 $g:U\to V$，

使得对任意 $(t,x)\in U\times V$，$F(t,x)=0$（即 $\int_x^t f(u)\mathrm{d}u=x$）当且仅当

$x=g(t)$。

（II）解：对恒等式 $\int_{g(t)}^t f(u)\mathrm{d}u=g(t)$ 求导得到 $f(t)-f(g(t))g'(t)=g'(t)$，从而 $g'(1)=\dfrac{f(1)}{f(0)+1}=\dfrac{f(1)}{f(0)+1}$。

21. （7 分）设 $f\in \mathrm{C}^{(0)}[0,1]$ 且 $f(x)>0$，$\alpha>0$。根据参数 α 的不同值，研究函数

$g(y)=\int_0^1\dfrac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$（$y\in[0,+\infty)$）的连续性，并证明你的结论。

结论：当 $0<\alpha\le 1$ 时，f 在 $(0,+\infty)$ 连续，在 $y=0$ 处不连续；当 $1<\alpha$ 时，f 在 $[0,+\infty)$ 连续。

证明：对于 $(0,+\infty)$ 的任何有界闭子区间 $[\delta,N]$，$\dfrac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}$ 在 $[0,1]\times[\delta,N]$ 上（一致）连续，所以

$g(y)=\int_0^1\dfrac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

以下讨论 $y=0$ 处的连续性，并设 $0\le y<1$。

当 $y=0$ 时，$\dfrac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}=0$，所以 $g(0)=0$。

因为 $f\in \mathrm{C}^{(0)}[0,1]$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在最大值 M 和最小值 m。又因为 $f(x)>0$，所以 $0<m\le f(x)\le M$。

当 $0<\alpha\le 1$ 时，$\dfrac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\ge\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}\ge\dfrac{my}{x^2+y^2}$，所以

$$g(y)=\int_0^1\frac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\ge m\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=m\arctan\frac{1}{y}\to\frac{m\pi}{2}>0\text{，当 } y\to 0^+\text{。}$$

因此 $g(y)=\int_0^1\dfrac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 在 $y=0$ 处不连续；

当 $1<\alpha$ 时，$0\le\dfrac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\le\dfrac{My^{\alpha-1}y}{x^2+y^2}$，所以

$$0 \le g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x \le My^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x = My^{\alpha-1} \arctan \frac{1}{y} \to 0 = g(0)\text{，}$$

所以$g(y) = \int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x$在$y = 0$处连续。