重积分

1. 设$f(x,y)$在区域$D: x^2+y^2\le 1$上有连续的偏导数，且f在D的边界上取值为0，$f(0,0)=60$　求$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy$.

2. 已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$

其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$　计算$\iint\limits_D xyf_{xy}''(x,y)dxdy$.

3. 计算二重积分$\iint\limits_D(x-y)dxdy$，其中$D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\}$

4. 设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\le 1\\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2\end{cases}$，计算$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

其中$D=\{(x,y)||x|+|y|\le 2\}$

5. 设$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$，$\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=$____.

6. 设函数$f(x)$连续且大于0，$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}$，$G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t}f(x^2)dx}$

其中$\Omega(t)=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)|x^2+y^2\le t^2\}$

① 讨论$F(t)$在区间$(0,+\infty)$内的单调性

② 证当$t>0$时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$

7. 设直线L过$A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$两点，将L绕z轴旋转一周得到曲面Σ，Σ与平面$z=0$，$z=2$所围成的立体为Ω.

① 求曲面Σ的方程

② 求Ω的形心坐标.

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4\int_0^x du\int_0^{x-u} e^{u^3+v^3}dv}{e^{x^3}}$.

解：重积分换元 $s=u+v$, $t=u-v$. 则 $I=\int_0^x du\int_0^{x-u} e^{u^3+v^3}dv=\iint\limits_D e^{u^3+v^3}d$

其中 D 由 $u=0$, $v=0$, $u+v=x$ 所围 $=\iint\limits_{D'} e^{(\frac{s+t}{2})^3+(\frac{s-t}{2})^3}\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|ds\,d$

故 D' 由 $t=-s$, $t=s$, $s=x$ 所围. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} u_s' & u_t' \\ v_s' & v_t' \end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2}$

故 $I=\int_0^x \int_{-s}^{s} e^{\frac{1}{8}(2s^3+6st^2)}\left|-\frac{1}{2}\right|dt]ds$

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I}{e^{x^3}x^{-4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I_x'}{e^{x^3}3x^{-2}+e^{x^3}(-4x^{-5})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I_x'}{3x^{-2}e^{x^3}}$

其中 $I_x'=\int_{-x}^{x} e^{\frac{1}{4}(x^3+3xt^2)}\frac{1}{2}dt=e^{\frac{1}{4}x^3}[\int_0^x e^{(t\sqrt{\frac{3}{4}x})^2}d(t\sqrt{\frac{3}{4}x})](\sqrt{\frac{3}{4}x})^{-1}$

$=(\sqrt{\frac{3}{4}}x e^{-\frac{1}{4}x^3})^{-1}\int_0^{x\sqrt{\frac{3}{4}x}} e^{w^2}dw$

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{x\sqrt{\frac{3}{4}x}} e^{w^2}dw}{\sqrt{\frac{3}{4}}x e^{-\frac{1}{4}x^3}3x^{-2}e^{x^3}}=\dfrac{2}{9}$ （再用一次洛必达法则）

5. 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$.

其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. 计算二重积分 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$. 分部积分

解：化为累次积分 $\int_0^1 dy\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)dx$. 此处是把 y 看为常数，故有

$\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)dx=y\int_0^1 xf''_{xy}(x,y)dx=y\int_0^1 x\,df_y'(x,y)=xyf_y'(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 yf_y'(x,y)dx$

$=yf_y'(1,y)-\int_0^1 yf_y'(x,y)dx$ 　由 $f(1,y)=f(x,1)=0$, 易知 $f_y'(1,y)=f_x'(x,1)=0$.

故 $\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)dx=-\int_0^1 yf_y'(x,y)dx$ 　对上述积分交换次序，可得

$-\int_0^1 dy\int_0^1 yf_y'(x,y)dx=-\int_0^1 dx\int_0^1 yf_y'(x,y)dy$. 　再考虑积分 $\int_0^1 yf_y'(x,y)dy$. 此时 x 为常数

$\int_0^1 yf_y'(x,y)dy=\int_0^1 y\,df(x,y)=yf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dy=-\int_0^1 f(x,y)dy$

故 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=-\int_0^1 dx\int_0^1 yf_y'(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$.

1. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减的正值函数，证 $\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \le \dfrac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$

利用定积分与重积分的关系 $(\int_a^b f(x)dx)\cdot(\int_c^d g(x)dx) = \int_a^b f(x)(\int_c^d g(y)dy)dx = \iint_D f(x)g(y)d\sigma$ $D: a\le x\le b, c\le y\le d$

证明：因由 $f(x)>0$ 得知分母大于0，故转化为

$$\int_0^1 xf^2(x)dx\int_0^1 f(y)dy - \int_0^1 xf(x)dx\int_0^1 f^2(y)dy \le 0$$

上式左边 $=\iint_D (xf^2(x)f(y) - xf(x)f^2(y))dxdy$，$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

由于 x,y 互换后 D 的表达式不变，由轮换对称性 $\iint_D (xf^2(x)f(y)-xf(x)f^2(y))d\sigma \triangleq I_1$

即 $I_1 = I_2$，则原式 $=\frac{1}{2}(I_1+I_2)$ $I_2 \triangleq \iint_D (yf^2(y)f(x) - yf(y)f^2(x))d\sigma$

$$=\frac{1}{2}\iint_D (xf^2(x)f(y) - xf(x)f^2(y) + yf^2(y)f(x) - yf(y)f^2(x))d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D f(x)f(y)[xf(x)-xf(y)+yf(y)-yf(x)]d\sigma = \frac{1}{2}\iint_D f(x)f(y)[f(x)-f(y)](x-y)d\sigma$$

由于 f 为单调递减，所以 $x\le y \Rightarrow f(x)\ge f(y)$，$x>y \Rightarrow f(x)\le f(y)$.

故总有 $[f(x)-f(y)](x-y)\le 0$，再加上 $f(x)>0, f(y)>0$. 故知原式 ≤ 0.

2. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D: x^2+y^2\le 1$ 上有连续的偏导数，且 f 在 D 的边界上取值为0，$f(0,0)=20$. 求 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1} \dfrac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy$

$= f_1'\cos\theta + f_2'\sin\theta$

解：作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，$f$ 是 r,θ 的函数. $\frac{\partial f}{\partial r} = [f(r\cos\theta, r\sin\theta)]_r'$

$$所求 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^1 \frac{r\cos\theta f_x' + r\sin\theta f_y'}{r^2}rdr = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}[\int_\varepsilon^1(\cos\theta f_x' + \sin\theta f_y')dr]d\theta$$

由于是题设 $f(x,y)$，故 $f_1' = f_x'$，$f_2' = f_y'$. 所求即为 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}[\int_\varepsilon^1 \frac{\partial f}{\partial r}dr]d\theta$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}[f(r\cos\theta, r\sin\theta)]_{r=\varepsilon}^{r=1}d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}[f(\cos\theta,\sin\theta) - f(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)]d\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}[0 - f(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)]d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[-f(\varepsilon\cos\xi, \varepsilon\sin\xi)\cdot 2\pi]$$

$$= -2\pi\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -2\pi f(0,0) = -40\pi.$$

其中 $f(\cos\theta,\sin\theta)=0$ 是因为"f 在 D 的边界上取值为0"，即当 $x^2+y^2=1$ 时，$f(x,y)=0$

$\int_0^{2\pi}[-f(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)]d\theta = -f(\varepsilon\cos\xi, \varepsilon\sin\xi)2\pi$ $(0<\xi<2\pi)$ 利用定积分中值定理

$\varepsilon\to 0^+ \Rightarrow (x,y) = (\varepsilon\cos\xi, \varepsilon\sin\xi)\to(0,0)$

3.解：$r \le 2(\sin\theta+\cos\theta)$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)r\,dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)r^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^3d(\sin\theta+\cos\theta)=-\frac{8}{3}$$

另解：坐标变换：$u=x-1, v=y-1$. $D=\{(u,v)\mid u^2+v^2\le 2, v\ge u\}$

则 $$\iint_D(u-v)\,du\,dv=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)r\,dr=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\sin\theta+\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=-\frac{8}{3}$$

4.解：被积函数关于x, y均为偶函数，且积分区域关于x, y轴对称

故 $\iint_D f(x,y)d\sigma=4\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma$，$D_1$为$D$在第一象限内部分

$$\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma=\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0,y\ge 0}}x^2d\sigma+\iint_{\substack{1<x+y\le 2\\ x\ge 0,y\ge 0}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$$

$$=\int_0^1dx\int_0^x x^2dy+\left(\int_0^1dx\int_{1-x}^{2-x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy+\int_1^2dx\int_0^{2-x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)$$

$$=\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

故 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$

另解 $$\iint_{\substack{1\le x+y\le 2\\ x>0,y>0}}f(x,y)d\sigma=\iint_{\substack{1\le x+y\le 2\\ x\ge 0,y>0}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}dr=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

5. $$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\,\rho^2\cos^2\varphi\,d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d(-\cos\varphi)\int_0^1\rho^4d\rho$$

$$=-\frac{2\pi}{15}\cos^3\varphi\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{15}\pi$$

也可先二后一

$$原式=\int_{-1}^1z^2dz\iint_{D_z}dxdy=\int_{-1}^1\pi z^2(1-z^2)dz=\frac{4}{15}\pi$$

$$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1-z^2\}$$

6. 解：(1) $F(t)=\dfrac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}=\dfrac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)rdr}$

$F'(t)=2\dfrac{tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)dr}{[\int_0^t f(r^2)rdr]^2}$

在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$，故单增

(2) $G(t)=\dfrac{\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr}$　只要证 $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$

令 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-[\int_0^t f(r^2)rdr]^2$

$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0$，$g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增.

又 $g(t)$ 在 $t=0$ 处连续，故 $t>0$ 时 $g(t)>g(0)$ 得证.

7. 解 (1) L 方程为 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 即 $\begin{cases}x=1-z\\y=z\end{cases}$

于是 Σ 方程为 $x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$，即 $x^2+y^2-2z^2+2z-1=0$

(2) Ω 关于 xoz，yoz 面对称，则形心坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint_\Omega zdxdydz}{\iiint_\Omega dxdydz}$

Σ 柱面方程为 $r=\sqrt{2z^2-2z+1}$，Ω 在 xoy 投影 D：$x^2+y^2\le1$

$\iiint_\Omega zdxdydz=\int_0^2 zdz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z^2-2z+1}}dr=\pi\int_0^2 z(2z^2-2z+1)dz=\frac{14}{3}\pi$

$\iiint_\Omega dxdydz=\int_0^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z^2-2z+1}}dr=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)dz=\frac{10}{3}\pi$

故 Ω 形心坐标为 $(0,0,\frac{7}{5})$.

曲线积分与曲面积分

1. 设 $D_t=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le t^2, t>0\}$，$f(x,y)$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内存在连续偏导数，$f(0,0)=1$。若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f(x,y)$，$\vec{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial n}dl$.

2. 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，$f(x,y)$ 有连续偏导数，且对任意 $t>0$，均有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$。证明对 L 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

3. 设 $L_1: x^2+y^2=1$，$L_2: x^2+y^2=2$，$L_3: x^2+2y^2=2$，$L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记 $I_i=\oint_{L_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy$ $(i=1,2,3,4)$。求 $I_{i\,max}$

4. L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看为逆时针方向，则 $\oint_L z\,dx+y\,dz=$ ____.

5. 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界。试证

① $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

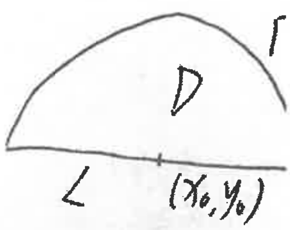
② $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

6. 设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xoy 平面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算 $I=\iint_\Sigma\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 为椭球面 S 位于 C 上方的部分

7. 计算曲面积分 $I=\oiint_{S^+}\left(\frac{dy\wedge dz}{x}+\frac{dz\wedge dx}{y}+\frac{dx\wedge dy}{z}\right)$，其中 S^+ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

曲面积分与曲线积分

1. 设函数 $P(x,y), Q(x,y)\in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$，在以任意点 (x_0,y_0) 为中心，任意正数 r 为半径的上半圆周 Γ 上的第二类曲线积分 $\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. 求证：在 $\mathbb{R}^2$ 上有 $P(x,y)\equiv 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0$.



证明: 加上直径 L, 记半圆域为 D.

$\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

$\int_{\Gamma+L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

由Green公式, $\int_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}\frac{1}{2}$

其中 (ξ,η) 为 D 中一点. 而 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)dx=P(\delta,y_0)2r$

其中 $\delta\in(x_0-r,x_0+r)$ 两者相等, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}\frac{1}{2}\pi r^2=P(\delta,y_0)2r$

即 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta)}\frac{1}{2}\pi r=2P(\delta,y_0)$ 令 $r\to 0$, $P(x_0,y_0)=0$

由 $(x_0,y_0)\in \mathbb{R}^2$ 的任意性, $P(x,y)\equiv 0$, $x,y\in\mathbb{R}^2$. $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

2. 设 $D_t=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le t^2, t>0\}$, $f(x,y)$ 在 D_t 上连续, 在 D_t 内存在连续偏导数. $f(0,0)=1$. 若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f(x,y)$. $\vec{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量, 求极限 $\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial n}dl$

解: $\frac{\partial f}{\partial n}=\nabla f\cdot\vec{n}$. 利用Green公式第二种形式可得

$\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial n}dl=\oint_{\partial D_t}\nabla f\cdot\vec{n}\,dl=\oint_{\partial D_t}=(f_x'\vec{i}+f_y'\vec{j})=\iint_{D_t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$

$=\frac{1}{2}\iint_{D_t}f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f\cdot r\,dr=\pi\int_0^t f\cdot r\,dr$

$\lim_{t\to 0}\frac{\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial n}dl}{1-\cos t}=\pi\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f\cdot r\,dr}{1-\cos t}=\pi\lim_{t\to 0}\frac{f\cdot t}{\sin t}=\pi\lim_{t\to 0}f(0,0)=\pi$ (洛必达)

3. 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 均有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 证明对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint y f(x,y)dx - xf(x,y)dy=0$ （P204 条件 连续可微）

解：由 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导得 $xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2tf(x,y)$

令 $t=1$，则 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y)$ 记 $X=yf(x,y)$，$Y=-xf(x,y)$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=f(x,y)+yf_y'(x,y),\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=-f(x,y)-xf_x'(x,y)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=-f(x,y)-xf_x'(x,y)-[f(x,y)-xf_x'(x,y)]=-2f(x,y)-[xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)]=0$$

由于是单连通域，又满足 $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0$

于是，对任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)dx - xf(x,y)dy=0$

证明：若 $f(u)$ 为连续函数，且 L 为逐段光滑的闭曲线，则 $\oint_L f(\sqrt{x^2+y^2})(xdx+ydy)=0$

提示：此题无法用条件 $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$ 来证明，因为 $f(u)$ 仅是连续函数，故采用 $\oint Xdx+Ydy=0$ 的另一等价条件：存在某个函数 $u(x,y)$，使 $du=Xdx+Ydy$ P208 定理 4.6.4

$$f(\sqrt{x^2+y^2})(xdx+ydy)=\frac{1}{2}f(\sqrt{x^2+y^2})d(x^2+y^2)=d\left[\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2}f(\sqrt{t})dt\right]$$ 得证

错误解法：由 $X=xf(\sqrt{x^2+y^2})$，$Y=yf(\sqrt{x^2+y^2})$，$\frac{\partial X}{\partial y}=xf'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})$

$\frac{\partial Y}{\partial x}=yf'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})=\frac{\partial X}{\partial y}$ 故曲线积分与路径无关，得证

4. 计算曲面积分 $I=\oiint_{S^+}\left(\frac{dy\wedge dz}{x}+\frac{dz\wedge dx}{y}+\frac{dx\wedge dy}{z}\right)$ 其中，S^+ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧

分析 由于 $X=\frac{1}{x}$，$Y=\frac{1}{y}$，$Z=\frac{1}{z}$ 在点 $(0,0,0)$ 不连续，因此 X,Y,Z 在 S^+ 所围区域内一阶偏导数不连续，故不能用高斯公式。

$$\oiint_{S^+}\frac{dx\wedge dy}{z}=\frac{2}{c}\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{2}{c}ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{4\pi abc}{c^2}$$

由对称性，可得 $I=4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

书上 P198 直角坐标读者完成

3.解：由题意，$X(x,y)=y+\frac{y^3}{6}$，$Y(x,y)=2x-\frac{x^3}{3}$，则 $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=1-x^2-\frac{y^2}{2}$

由格林公式 $I_1=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2\cos^2\theta-\frac{r^2\sin^2\theta}{2})rdr$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r-\frac{r^3\cos^2\theta}{2}-\frac{r^3}{2})dr=\int_0^{2\pi}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4\cos^2\theta}{8}-\frac{r^4}{8})\Big|_0^1d\theta$

$=\int_0^{2\pi}(\frac{3}{8}-\frac{\cos^2\theta}{8})d\theta=\int_0^{2\pi}(\frac{3}{8}-\frac{1+\cos2\theta}{16})d\theta=\frac{5}{8}\pi$

$I_2=\frac{1}{2}\pi$　　$I_3=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$　　$I_4=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$　　故 $\max\limits_{1\le i\le4}\{I_i\}=I_4$.

4. 解：L 参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\\z=-\sin\theta\end{cases}$，$\theta$ 从 0 到 2π，则

$\oint_L zdx+ydz=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)d\theta=\pi$

或者斯托克斯公式 $\oint_L zdx+ydz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & y\end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}dydz+dzdx$

$=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\pi$　　$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$.

5. 证：① 左边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\left(\int_0^{\pi}e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)dx$

右边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$　得证

② $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge2$，故 原式 $=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge2\pi^2$

另解：由格林公式 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint\limits_{D}(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy$

$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint\limits_{D}(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy$

由于 D 有轮换对称性，故 $\iint\limits_{D}(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy=\iint\limits_{D}(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy$

得证

6. 解：(1) 求轨迹 C

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，动点 $P(x,y,z)$ 切平面的法向量为

$\vec{n}=\{2x,2y-z,2z-y\}$，由切平面垂直 xoy，得 $2z-y=0$

点在椭球面上，故 C 方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-yz=1 \\ 2z-y=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2+\frac{3}{4}y^2=1 \\ 2z-y=0 \end{cases}$

(2) 由于 C 在 xoy 平面投影为 D_{xy}：$x^2+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$.

又 $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 两边分别对 x,y 求导得

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$，　$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-2z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-z}{y-2z}$

$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2}\,dxdy$

$=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{|y-2z|}dxdy=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}dxdy$

故 $I=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})dxdy=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\sqrt{3}\times\pi\times1\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi$