微积分 A 期末小班辅导 [讲义]

小班辅导讲师 何昊天

2021 年春季学期

目录

1 重积分

1.1 重积分的定义

定义积分的思路：分割，取点，求和，取极限，并证明极限值与取点方法无关.

重积分存在的一个充分条件：

(i) 若 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 存在.

(ii) 若 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，则三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}\nu$ 存在.

1.2 重积分的性质

以二重积分为例（三重积分或多重积分是类似的），重积分有如下基本性质：

(i) 线性性：$\iint\limits_D [af(x,y)+bg(x,y)]\mathrm{d}\sigma = a\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + b\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(ii) 区域可加性：若 D 能分割成两个区域 D_1, D_2 的不交并，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(iii) 若 $f(x,y)$ 在 D 上恒为 1，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = |D|$（这里 $|D|$ 表示 D 的面积，若是空间区域则用 $|\Omega|$ 表示 Ω 的体积，之后的记号都与此相同）.

(iv) 单调性：若 $f(x,y)\le g(x,y)$ 在 D 上恒成立，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$，由此还可推出 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$.

(v) 若 $m\le f(x,y)\le M$ 在 D 上恒成立，则 $m|D| \le \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M|D|$.

(vi) 积分中值定理：若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则存在点 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)|D|$.

1.3 重积分的计算

计算的基本思路：根据区域特点进行选择，将重积分化为累次积分计算.

(i) 设 $D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x), a\le x\le b\}$，则：

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

(ii) 设 $D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y), c\le y\le d\}$，则：

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

(iii) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$，则：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}\nu=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

(iv) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z,c_1\le z\le c_2\}$，则：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}\nu=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.4 重积分变量代换

三种最常用的变量代换方法总结如下：

(i) 在极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 下有：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

(ii) 在柱坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$ 下有：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

(iii) 在球坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$ 下有：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

一般情况下，做变量代换时除了对函数进行变形外，面积微元和体积微元在换元前后也需要乘上相差的变化比率，这个值就是 Jacobi 行列式的值，换元成立的条件为被积函数连续且 Jacobi 行列式非零.

1.5 重积分的对称性

简化重积分的计算方法中最重要的就是利用对称性，通常的对称性涉及两个方面：

(i) 区域的对称性：若区域关于某坐标轴或某坐标平面对称，则可以进一步考察被积函数对应分量是否有奇偶性.

(ii) 被积函数的奇偶性：在区域对称的前提下，若对应分量是奇函数则积分值为 0，若对应分量是偶函数则可以转化为一半区域的积分.

当平面区域 D 关于直线 $y=x$ 对称时，可以考察轮换对称性（对于空间区域 Ω 其实也可以类比得到相似结论）：

(i) 若 $f(x,y)=f(y,x)$（称为轮换对称），则可以转化为一半区域的积分.

(ii) 若 $f(x,y)=-f(y,x)$（称为轮换反对称），则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$.

若区域是高度对称的图形，还可以进一步利用区域重心简化部分计算：

(i) 若平面区域 D 的重心为 $(\bar{x},\bar{y})$，则 $\bar{x}=\frac{1}{|D|}\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma,\bar{y}=\frac{1}{|D|}\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$.

(ii) 若空间区域 Ω 的重心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则 $\bar{x}=\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}\nu,\bar{y}=\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_\Omega y\mathrm{d}\nu,\bar{z}=\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}\nu$.

1.6 例题

例题 1.1 计算下列积分：

(i) $I=\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{xy}$，其中 $D=\{(x,y)\mid 2\le\frac{x}{x^2+y^2}\le 4, 2\le\frac{y}{x^2+y^2}\le 4\}$.

(ii) $I=\iint\limits_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=4-x^2, y=-3x, x=1$ 围成.

(iii) $I=\iiint\limits_\Omega (x+y+z+1)^2\mathrm{d}\nu$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

参考思路

(i) 考虑极坐标替换，D 的边界分别变为：

$$\frac{x}{x^2+y^2}=2\Rightarrow r=\frac{1}{2}\cos\theta \qquad \frac{x}{x^2+y^2}=4\Rightarrow r=\frac{1}{4}\cos\theta$$
$$\frac{y}{x^2+y^2}=2\Rightarrow r=\frac{1}{2}\sin\theta \qquad \frac{y}{x^2+y^2}=4\Rightarrow r=\frac{1}{4}\sin\theta$$

其中每一组边界的内部是位于两个圆之间的月牙形区域，积分区域 D 即为两个月牙形区域的交，可以看出 D 关于直线 $y=x$ 是对称的，被积函数 $f(x,y)=\frac{1}{xy}$ 满足 $f(x,y)=f(y,x)$，D 边界上的四个顶点坐标分别为 $(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\pi}{4}),(\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{\pi}{4}),(\frac{\sqrt{5}}{10},\arctan\frac{1}{2}),(\frac{\sqrt{5}}{10},\arctan 2)$，可得：

$$I=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{4}\cos\theta}^{\frac{1}{2}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}r}{r\sin\theta\cos\theta}=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln 2+\ln\tan\theta}{\tan\theta}\mathrm{d}(\tan\theta)=\ln^2 2$$

(ii) 设 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$，则显然 $f(-x,y)=-f(x,y)$，且 $f(x,-y)=x\ln(-y+\sqrt{1+y^2})=x\ln\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}=-x\ln(y+\sqrt{1+y^2})=-f(x,y)$，所以被积函数 $f(x,y)$ 关于 x,y 都是奇函数.

再来考虑这个积分区域 D，这里需要一点巧妙的观察：如果添加一条辅助线 $y=3x$ 的话，该积分区域会被划分成两个部分，这两个部分分别是关于 x 轴和 y 轴对称的，那么被积函数在两个部分上的积分都是 0，所以原积分的值 $I=0$.

(iii) 被积函数 $f(x,y,z)=(x+y+z+1)^2$ 较为复杂，考虑进行一点化简：

$$(x+y+z+1)^2=x^2+y^2+z^2+1+2xy+2xz+2yz+2x+2y+2z$$

注意到后面的一大堆项都是关于某个变量的奇函数，而积分区域是一个各个方向都对称的球，那么这些项的积分值都为 0，原积分可以简化为：

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2+1\mathrm{d}\nu=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r+\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}\nu=\frac{32\pi}{15}$$

例题 1.2 计算球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在圆柱面 $x^2+y^2=\pm x$ 外的部分的面积.

参考思路　在这类问题中，想清楚几何图景是最重要的：我们要计算的是一个球面被两个圆柱面截去一部分后剩余的面积，这两个圆柱面在母线 z 轴处相交，如果我们沿着 yOz 平面切一刀，两侧的面积应该是相等的，此外球面关于 xOy 平面也是对称的，而圆柱面在 xOy 平面上的投影又比较简单，所以我们可以将整个问题转化为计算在第一、第四卦限内球面被圆柱面截走的面积，用球面面积减去这个值的四倍即为结果.

用人话说，上半球面方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，对应面积微元 $\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，圆柱面投影 $D=\{(x,y)\mid\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{1}{4}\}$，只需计算：

$$A_0=\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}=\pi-2$$

所求面积即为 $A=4\pi-4A_0=8$.

例题 1.3 设 f 连续，$k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\neq 0$，$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}$，证明：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(ax+by+cz)\mathrm{d}\nu=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(kt)\mathrm{d}t$$

参考思路　这是一个证明积分等式的问题，观察清楚等号两侧的积分类型是最重要的：从一个三重积分到一个定积分，那么我们应该是完成了一个二重积分的计算.

其次是这道题里面有一个特别的 f，对这个 f 我们没有太多可以利用的性质，那只能猜测有 $t=\frac{a}{k}x+\frac{b}{k}y+\frac{c}{k}z$，从这里可以推断出，大致过程应该是进行了一个换元从 x,y,z 到 r,s,t，然后将其中 r,s 这二重积分给算了出来，接下来只需构造这个换元即可.

一般在考虑换元的构造时，从侧面考虑 Jacobi 行列式的值和积分区域的变化可能是一个好用的思路，毕竟这两者如果变得太复杂，积分是很难做计算的，这里看到 t 和 x,y,z 之间是线性关系，且其系数构成一个单位长度向量，所以我们可以考虑将 x,y,z 做一个旋转来得到 r,s,t，对于旋转来说 Jacobi 行列式 $|J|=1$，积分区域可以写作 $\Omega=\{(r,s,t)\mid r^2+s^2+t^2\leq 1\}$，这就是符合我们预期的，最后做计算得：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(ax+by+cz)\mathrm{d}\nu=\int_{-1}^{1}f(kt)\mathrm{d}t\iint\limits_{r^2+s^2\leq 1-t^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(kt)\mathrm{d}t$$

例题 1.4 设 f 在 $[0,1]$ 上连续、单调递减且恒大于 0，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

参考思路 这里给了四个定积分让我们去证明一个不等式，注意到这一章标题叫重积分，所以我们得想想看重积分和定积分之间是个什么关系：重积分化为累次积分本质上是利用定积分在做计算，那么反过来如果将两个定积分乘起来的话，我们也可以得到一个重积分，通常来说重积分里的处理工具是更加丰富的，能够帮助我们解决原来的定积分问题.

将原不等式交叉相乘并移项化简得：

$$\begin{aligned}&\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\le 0\\ \Rightarrow &\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xf(x)f(y)(f(x)-f(y))\le 0\end{aligned}$$

对这个式子进行一些观察：$f(x)f(y)$ 是关于 x,y 轮换对称的，$f(x)-f(y)$ 是关于 x,y 轮换反对称的，只有第一项 x 缺少对称性.

通常来说应该是更对称的函数具有更好的性质，我们考虑将其向这方面转化，交换原积分中的 x,y 两个变量当然不改变积分的值，这里用到一个重要的小技巧：如果两个积分的值相等，则它们都等于它们相加后的 $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xf(x)f(y)(f(x)-f(y))\\ =&\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} yf(y)f(x)(f(y)-f(x))\\ =&\frac{1}{2}\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x)f(y)(x-y)(f(x)-f(y))\end{aligned}$$

回到原函数 f 上，因为 f 恒大于 0，所以 $f(x)f(y)>0$，因为 f 单调递减，所以 $(x-y)(f(x)-f(y))$ 是异号的从而不大于 0，则有 $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x)f(y)(x-y)(f(x)-f(y))\le 0$，原不等式得证.

例题 1.5 设平面区域 D 在 x 轴和 y 轴上的投影分别为 $[a,b],[c,d]$，点 $(\alpha,\beta)\in D$，证明：

(i)

$$\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right|\le (b-a)(d-c)|D|$$

(ii)

$$\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right|\le \frac{1}{4}(b-a)^2(d-c)^2$$

参考思路

(i) 利用 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$ 可得：

$$\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |x-\alpha|\cdot|y-\beta|\mathrm{d}\sigma$$

因为 x,α 都落在 $[a,b]$ 中，y,β 都落在 $[c,d]$ 中，所以 $|x-\alpha|\le b-a, |y-\beta|\le d-c$，有：

$$\iint\limits_D |x-\alpha|\cdot|y-\beta|\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D (b-a)(d-c)\mathrm{d}\sigma = (b-a)(d-c)|D|$$

原不等式得证.

(ii) 设 $D' = [a,b]\times[c,d]$，则 $D\subseteq D'$，由于 $|x-\alpha|\cdot|y-\beta|$ 恒为正，应有：

$$\iint\limits_D |x-\alpha|\cdot|y-\beta|\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_{D'} |x-\alpha|\cdot|y-\beta|\mathrm{d}\sigma = \int_a^b |x-\alpha|\mathrm{d}x \int_c^d |y-\beta|\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^\alpha (\alpha-x)\mathrm{d}x + \int_\alpha^b (x-\alpha)\mathrm{d}x + \int_c^\beta (\beta-y)\mathrm{d}y + \int_\beta^d (y-\beta)\mathrm{d}y$$
$$= \left(\frac{1}{2}(\alpha-a)^2 + \frac{1}{2}(b-\alpha)^2\right)\left(\frac{1}{2}(\beta-y)^2 + \frac{1}{2}(y-\beta)^2\right)$$

上面几项可以分别看成关于 α 的二次函数和关于 β 的二次函数，对二次函数求极值即得原不等式右侧，从而得证.

例题 1.6 设 f 连续且 $f(0)=0$，$F(t) = \iiint\limits_{\Omega(t)} [z^2 + f(x^2+y^2)]\mathrm{d}\nu$，其中 $\Omega(t) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le t^2, 0\le z\le 1\}$，计算 $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$.

参考思路　当 $t\to 0$ 时，$|\Omega(t)|\to 0$，在一个零体积区域上做三重积分的值肯定是为 0 的，所以 $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = 0$，所求极限是一个 $\frac{0}{0}$ 型的极限，这引导我们使用洛必达法则.

注意到 $F(t)$ 里面 t 是在区域上的，没办法直接对 $F(t)$ 求导，这里需要先进行一些化简，考虑到积分区域是一个圆柱面，可以使用柱坐标换元：

$$F(t) = \iiint\limits_{\Omega(t)} [z^2 + f(x^2+y^2)]\mathrm{d}\nu = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^t \mathrm{d}r \int_0^1 [z^2 + f(r^2)]r\mathrm{d}z = \frac{\pi t^2}{3} + 2\pi\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r$$

使用洛必达法则有：

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2} = \frac{\pi}{3} + \lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi t f(t^2)}{2t} = \frac{\pi}{3} + \pi f(0) = \frac{\pi}{3}$$

注意这里使用了变上限积分求导公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t,x)\mathrm{d}t = f(\varphi(x),x)\varphi'(x) - f(\psi(x),x)\psi'(x) + \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\mathrm{d}t$$

对一些上半学期或者上学期公式有遗忘的同学，需要记得复习.

2　曲线积分与曲面积分

2.1　第一类曲线积分

第一类曲线积分认为被积曲线有不均匀的线密度，但在每一段弧微元上线密度相等，因此利用弧微分公式可以将第一类曲线积分转化为一元函数的定积分.

(i) 若平面曲线 L 由 $y=y(x)(a\leq x\leq b)$ 给出，则：

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

(ii) 若平面曲线由极坐标 $r=r(\theta)(\alpha\leq\theta\leq\beta)$ 给出，则：

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

(iii) 若平面曲线 L 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}(\alpha\leq t\leq\beta)$ 给出，则：

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

(iv) 若空间曲线 L 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\ (\alpha\leq t\leq\beta)\\z=z(t)\end{cases}$ 给出，则：

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

2.2　第二类曲线积分

第二类曲线积分认为有一个力场在对物体做功，它是对坐标的积分而非对弧微元的积分，但也可以借助弧微分公式将第二类曲线积分转化为一元函数的定积分.

(i) 若平面曲线 L 由 $y=y(x)(a\leq x\leq b)$ 给出，则：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b[P(x,f(x))+Q(x,f(x))f'(x)]\mathrm{d}x$$

(ii) 若平面曲线 L 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}(\alpha\leq t\leq\beta)$ 给出，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

从两类曲线积分的想法可以看出，第一类曲线积分中并不存在曲线方向的区别，但第二类曲线积分是沿着曲线完成的，因此转化为定积分时参数的取值方向要和选取的曲线方向一致.

两类曲线积分之间可以通过曲线的切向量联系起来：

(i) 设 $(\cos\alpha, \cos\beta)$ 是与平面曲线 L 同方向的单位切向量，则：

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L [P\cos\alpha + Q\cos\beta]\mathrm{d}l$$

(ii) 设 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是与平面曲线 L 同方向的单位切向量，则：

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_L [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\mathrm{d}l$$

2.3 Green 公式

Green 公式：设 D 是平面有界闭区域，∂D 分段光滑，P, Q 在开区域上有连续偏导数、闭区域上连续，则：

$$\oint_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

稍做变形可以得到沿外法向量积分的版本：

$$\oint_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}y - Q(x,y)\mathrm{d}x = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

Green 公式描述了第二类曲线积分和二重积分之间的关系，除了少数情况下直接使用它做计算以外，更多时候我们期待的都是 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 的情形，此时可以说第二类曲线积分的结果和路径或者环路的选取是无关的.

若 P, Q 在单连通平面区域 D 上有连续偏导数，则以下几个条件等价：

(i) 曲线积分 $\int_{L(A,B)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 D 内只与起点 A 和终点 B 有关，此时可记作：

$$\int_{L(A,B)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_A^B P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(ii) 对 D 内任意分段光滑闭曲线 Γ，都有：

$$\oint_\Gamma P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

(iii) 存在 D 上的可微函数 U 使得 $\mathrm{d}U(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$,此时 $U(x,y)$ 称为 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的一个原函数.

(iv) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内恒成立.

对于空间曲线积分，前三条是类似的，只需将最后一条修改为 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ 在 D 内都恒成立.

关于原函数 $U(x,y)$，还有以下两条结论：

(i) 若曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则原函数 U 可由变终点曲线积分确定：

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(ii) 若曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关且有原函数 $U(x,y)$，则：

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=U(x_1,y_1)-U(x_0,y_0)$$

2.4 第一类曲面积分

第一类曲面积分认为被积曲面有不均匀的面密度，但在每一片曲面微元上面密度相等，因此利用面积微分公式可以将第一类曲面积分转化为二元函数的重积分.

(i) 若曲面 Σ 在 xOy 平面上的无重叠投影为 D_{xy}，其方程为 $\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，且偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在 D_{xy} 上连续，则：

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(ii) 若曲面 Σ 在 xOz 平面上的无重叠投影为 D_{xz}，其方程为 $\Sigma: y=y(x,z),(x,z)\in D_{xz}$，且偏导数 $\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial z}$ 在 D_{xz} 上连续，则：

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xz}}f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

(iii) 若曲面 Σ 在 yOz 平面上的无重叠投影为 D_{yz}，其方程为 $\Sigma: x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，且偏导数 $\frac{\partial x}{\partial y},\frac{\partial x}{\partial z}$ 在 D_{yz} 上连续，则：

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}}f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(iv) 若曲面 Σ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)((u,v)\in D)\\z=z(u,v)\end{cases}$ 给出，则：

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2+\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|^2+\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

2.5 第二类曲面积分

第二类曲面积分认为有一个流体向量场从曲面流出，它也是对坐标的积分而非对面积微元的积分，它的基本形式为：

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

其中 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 可以理解为有向投影.

(i) 若曲面 Σ 在 xOy 平面上的无重叠投影为 D_{xy}，其方程为 $\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，则：

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中正负号的选取取决于 Σ 外法向量与 z 轴的夹角.

(ii) 若曲面 Σ 在 xOz 平面上的无重叠投影为 D_{xz}，其方程为 $\Sigma: y=y(x,z),(x,z)\in D_{xz}$，则：

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

其中正负号的选取取决于 Σ 外法向量与 y 轴的夹角.

(iii) 若曲面 Σ 在 yOz 平面上的无重叠投影为 D_{yz}，其方程为 $\Sigma: x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，则：

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中正负号的选取取决于 Σ 外法向量与 x 轴的夹角.

2.6 Gauss 公式和 Stokes 公式

Gauss 公式：设 Ω 是空间有界闭区域，$\partial\Omega$ 分片光滑，记 Σ 为 $\partial\Omega$ 外侧，P,Q,R 在 Ω 上有连续偏导数，则：

$$\oiint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}\nu$$

Stokes 公式：设 Σ 是空间光滑曲面，$\partial\Sigma$ 分段光滑，记 L 为 $\partial\Sigma$ 按右手法则定向，P,Q,R 在 Σ,L 上有连续偏导数，则：

$$\oint_{L} P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

事实上我们可以发现，Newton-Leibniz 公式和 Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式有几乎相同的形式，可以从这一点上进一步理解三大公式的意义.

重积分和曲线积分、曲面积分之间通过定义和这三个重要公式形成了三条路线：

(i) 曲线路线：定积分-第一类曲线积分-第二类曲线积分.

(ii) 曲面路线：二重积分-第一类曲面积分-第二类曲面积分.

(iii) 三大公式路线：二重积分-第二类曲线积分-第二类曲面积分-三重积分.

2.7 例题

例题 **2.1** 设 L 为原点到 $(2,2)$ 的圆弧 $y=\sqrt{4x-x^2}$，计算：

$$\int_L (xe^{2y}+y)\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y$$

参考思路　按定义（即向量场和切向量的内积）来计算这个积分太过麻烦，我们考虑用 Green 公式来做计算，为了将积分曲线补充成闭曲线，通常选择添加平行于坐标轴的折线段 $L_1:(0,0)\to(2,0)$ 和 $L_2:(2,0)\to(2,2)$，先计算沿着折线段的积分：

$$\int_{L_1+L_2}(xe^{2y}+y)\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y=\int_0^2 x\mathrm{d}x+\int_0^2(4e^{2y}-y)\mathrm{d}y=2e^4-2$$

设 $P(x,y)=xe^{2y}+y, Q(x,y)=x^2e^{2y}-y$，计算两个偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^{2y}+1, \frac{\partial Q}{\partial x}=2xe^{2y}$，设闭曲线内部的区域为 D，使用 Green 公式计算闭曲线的积分：

$$\oint_{L^-+L_1+L_2}(xe^{2y}+y)\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D -1\mathrm{d}\sigma=-\pi$$

所以原曲线积分：

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_1+L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\oint_{L^-+L_1+L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\pi+2e^4-2$$

虽然这个积分的计算其实已经并不复杂了，但我们还是思考一下有没有其它的计算方式，注意到我们计算偏导时会发现两个函数的偏导虽然不相等（如果相等，那就可以利用路径无关性直接转化为折线段上的积分），但是似乎也没差多少，那么可以做出如下拆分：

$$\int_L(xe^{2y}+y)\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y=\int_L xe^{2y}\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y+\int_L y\mathrm{d}x$$

这时前面的积分就是和路径无关的了，而后面的积分 $\int_L y\mathrm{d}x$ 其实就是在算区域 D 的面积，这是一个 $\frac{1}{4}$ 圆的面积，即可得 $\int_L y\mathrm{d}x=\pi$.

这个问题中的两种方法没有优劣之分吧，毕竟这个积分本身也很简单，但对比一下可以发现，在第二类曲线积分的计算中采取补充闭曲线后使用 Green 公式的方法是一个较为稳妥的做法，因为重积分的计算相对是更可操作的，而利用路径无关性的做法会更加简捷，对解决更复杂的问题是大有裨益的.

例题 **2.2** 设 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=r^2$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=h$ 之间的部分，计算：

$$\iint_\Sigma[(x+y)^2+z^2]\mathrm{d}S$$

参考思路　首先对被积函数进行一点简化：$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$，但 Σ 是关于 xOz 平面和 yOz 平面都对称的，$2xy$ 关于 x,y 又都是奇函数，则 $\iint\limits_{\Sigma} 2xy\mathrm{d}S=0$，原积分可化为 $\iint\limits_{\Sigma} x^2+y^2+z^2\mathrm{d}S$，而在 Σ 上始终有 $x^2+y^2=r^2$，所以原积分可进一步化为 $\iint\limits_{\Sigma} r^2+z^2\mathrm{d}S$.

将圆柱面向 yOz 平面做投影得 $D_{yz}=[-r,r]\times[0,h]$，注意这是有重叠投影，但可以根据对称性转化为半个圆柱面的两倍来做计算，取 x 轴正半轴一侧的圆柱面有 $\Sigma: x=\sqrt{r^2-y^2}$，计算得 $\mathrm{d}S=\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，有：

$$\iint\limits_{\Sigma} r^2+z^2\mathrm{d}S=2r\int_0^h(r^2+z^2)\mathrm{d}z\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}}\mathrm{d}y=2\pi r^3h+\frac{2\pi}{3}rh^3$$

但这样算就太死板了，第一类曲面积分和第一类曲线积分的一个重要区别在于，前者的微元选取方式会丰富得多，这里大可直接选择沿着 z 轴方向的一小截 $2\pi r\mathrm{d}z$ 作为面积微元，则：

$$\iint\limits_{\Sigma} r^2+z^2\mathrm{d}S=\int_0^h(r^2+z^2)2\pi r\mathrm{d}z=2\pi r^3h+\frac{2\pi}{3}rh^3$$

例题 **2.3** 设 Σ 为单位球面的外侧，计算：

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

参考思路　注意到这里积分区域是单位球面，球面在各个方向都是对称的，所以可以对坐标进行一个轮换得：

$$\begin{aligned}\frac{2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}&=\frac{2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{y\cos^2 y}=\frac{2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}\\ \frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{\cos^2 y}&=\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\cos^2 z}=\frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{\cos^2 x}\\ \frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}&=\frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}=\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{y\cos^2 y}\end{aligned}$$

那么我们可以将原积分化为 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{z\cos^2 z}+\frac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 来做计算，这样只需要做一次投影即可，注意到 $\frac{1}{z\cos^2 z}$ 和 $\frac{1}{\cos^2 z}$ 关于 z 分别是奇函数和偶函数，但这里对球面做投影时上下半球面的符号是一正一负的，所以前者可以转化为上半球面投影的两倍来计算，后者的积分值为 0，设原积分值为 I，于是：

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z\cos^2 z}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}\\ &=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}\cos^2\sqrt{1-r^2}}=4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}}=4\pi\tan 1\end{aligned}$$

例题 2.4 设 Σ 为旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 在 $z\geq 0$ 处的上侧部分，计算：

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

参考思路　这个积分直接计算较为复杂，我们考虑使用 Gauss 公式，可惜这里原点是被积函数的奇点，将底面圆盘直接贴到抛物面上构成闭曲面后 Gauss 公式是不成立的，只能考虑用一个小曲面屏蔽掉奇点.

取 r 充分小，令 Σ_r 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 的下侧，这个小曲面就可以屏蔽奇点了，再取 Σ_0 为 $z=0,r^2\leq x^2+y^2\leq 2$ 的下半侧，则 Σ,Σ_r,Σ_0 构成一个闭曲面，记闭曲面内部的区域为 Ω，设原积分的值为 I，首先利用 Gauss 公式有：

$$\begin{aligned}&\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_r+\Sigma_0}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
=&\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\nu\\
=&\iiint\limits_{\Omega}\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}\nu\\
=&\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}\nu=0\end{aligned}$$

注意到在 Σ_0 上 $z=0$ 恒成立，而该曲面关于 xOz 平面和 yOz 平面都对称，所以 x,y 的奇函数在上面积分的值均为 0，可得整个函数在 Σ_0 上的积分为 0，由此：

$$\begin{aligned}I&=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_r+\Sigma_0}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_r+\Sigma_0}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=-\iint\limits_{\Sigma_r}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_0}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=-\iint\limits_{\Sigma_r}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

取 Σ_r' 为 Σ_r 对应的下半球面的上侧，由对称性和奇偶性可知在两个半球面上积分的值相同，注意在球面内可以把奇点消去，设半径为 r 的球内区域为 Ω_r，再使用一次 Gauss 公式可得：

$$\begin{aligned}I&=-\iint\limits_{\Sigma_r}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\oiint\limits_{\Sigma_r+\Sigma_r'}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=-\frac{1}{2r^3}\oiint\limits_{\Sigma_r+\Sigma_r'}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{1}{2r^3}\iiint\limits_{\Omega_r}3\mathrm{d}\nu=\frac{3}{2r^3}|\Omega_r|=2\pi\end{aligned}$$

注意到在使用 Green 公式时，可能也会有类似的奇点问题，构造闭曲线和闭曲面时都需要注意屏蔽奇点，通常屏蔽奇点的工具都是一个足够小的圆周或球面，而对于圆周和球面本身往往能够找到别的方法进行转化或直接按定义计算从而避免奇点的影响.

例题 2.5 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 在 $z\geq 0$ 处的交线，从 z 轴向下看取逆时针方向，计算：

$$\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

参考思路 这个问题是一个典型的可以用 Stokes 公式简化计算的问题，通常来说用 Stokes 公式将第二类曲线积分转为第二类曲面积分的话，后者的计算一般是更复杂的，而反过来使用的话构造 P,Q,R 又比较困难（除非是可以一眼看出的情况），所以 Stokes 公式可能并非是计算的首选.

但为什么说这个问题比较合适呢，是因为我们可以看到 L 是球面上的曲线，球面的外法向量很容易写出，此外这里的三个函数求导后较为简单且有轮换对称性，可以借助法向量消去一些同类项，所以我们可以期待转化成第二类曲面积分后利用定义进行计算，这看起来是简捷可行的.

球面的单位外法向量为 $(\frac{x-2}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2})$，设原积分值为 I，被曲线 L 包围的球面部分为 Σ，使用 Stokes 公式得：

$$I=\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}$$

$$=2\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{\Sigma}[\frac{x-2}{2}(y-z)+\frac{y}{2}(z-x)+\frac{z}{2}(x-y)]\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma}(z-y)\mathrm{d}S$$

利用对称性易知 $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S=0$，设 Σ 在 xOy 平面上的投影为 D，有：

$$I=2\iint\limits_{\Sigma}(z-y)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi$$

例题 2.6 设 f 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ 上二阶连续可导，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$，证明：

$$\iint\limits_{D}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2e}$$

参考思路 这个被积函数看来很难做化简，我们先从积分区域入手，由于 D 是一个圆盘，所以可以做极坐标换元得：

$$\iint\limits_{D}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})r\mathrm{d}r=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}\theta$$

接下来的重点是对 $r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$ 的观察，这里重积分是没法做了，但这个被积函数的形式长得很像一个内积，且明显 $(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 和 $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$ 自然成为两个做内积的向量，借助这

一点我们可以考虑将这个积分转化为其它类型的积分来做，注意到前一个向量刚好是半径为 r 的圆周的外法向量，设原积分为 I，有：

$$I=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}\theta=\int_0^1 r\left(\oint_{\partial D_r}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}r$$

这里 D_r 是半径为 r 的圆盘，使用 Green 公式的变种即得：

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 r\left(\oint_{\partial D_r}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}r=\int_0^1 r\left(\iint\limits_{D_r}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}r\\&=\int_0^1 r\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}r=\pi\int_0^1 r(1-e^{-r^2})\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2e}\end{aligned}$$

例题 2.7 设 D 是平面有界区域且 ∂D 为光滑闭曲线，u,v 在 D 上二阶连续可导，证明：

$$\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}l=\iint\limits_D(v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}\sigma$$

其中 $\vec{n}$ 为曲线的单位法向量，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为 *Laplace* 算子.

参考思路 证明积分之间的等式的问题切入点是观察等式两边的积分类型，这里要看到方向导数本质上是一个向量，所以等式左侧是一个第二类曲线积分，右侧是一个二重积分，连接两者的桥梁应该是 Green 公式，再注意到 $\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\nabla u\cdot\vec{n}$，所以这个第二类曲线积分是沿着外法向量进行的，可以使用 Green 公式的变种做计算：

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}l&=\oint\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial x},v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint\limits_D\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D v\Delta u+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}\sigma\\\oint\limits_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}l&=\oint\limits_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial x},u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\vec{n}\mathrm{d}l=\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint\limits_D\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D u\Delta v+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

两式相减即得 $\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}l=\iint\limits_D(v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}\sigma$.

3 常数项级数

3.1 常数项级数的基本性质

定义数项级数的思路：无穷多个数按次序相加，用部分和数列的极限作为数项级数的和.

常数项级数有如下基本性质：

(i) 设 $C \neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 同收敛同发散，当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

(ii) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

(iii) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(iv) 在级数中去掉、增加或修改有限项，不改变其敛散性.

(v) 收敛级数任意加括号得到的级数仍收敛，且级数的和不变.

以下两个重要级数在敛散性判别的问题中经常用到：

(i) 等比级数 $a \neq 0$：

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} : \begin{cases} \frac{a}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{发散} & |q| \geq 1 \end{cases}$$

(ii) $p-$ 级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} : \begin{cases} \text{收敛} & p > 1 \\ \text{发散} & p \leq 1 \end{cases}$$

3.2 正项级数的判敛法

正项级数收敛有一个充要条件为部分和数列 S_n 有界，利用这一点可以将一些级数的问题转化为数列的问题.

常用的正项级数判敛法有：

(i) 比较判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leq v_n$ 恒成立，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可以推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散可以推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(ii) 比阶判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$，则当 $0 < k < +\infty$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散，当 $k = 0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可以推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$k = +\infty$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散可以推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(iii) 比值判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$，则当 $k < 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$k > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(iv) 根值判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$，则当 $k<1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$k>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

值得一提的是，根值判别法严格比比值判别法更强，这是因为极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ 可以推出极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$，但反过来并不成立（想一想为什么？）.

(v) Cauchy 积分判别法：若存在单调递减非负函数 f 使得 $f(n) = u_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

除了上面的总结以外，还有一些别的正项级数判敛法，但通常情况下它们是没有机会出场的，事实上并没有一个万能的算法可以判定一个级数是否收敛，只能是具体问题具体分析.

3.3 绝对收敛和条件收敛

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，绝对收敛的级数一定是收敛的，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

绝对收敛的级数任意改变顺序或加括号后不改变级数的和，而条件收敛的级数可以通过改变顺序使其收敛到任意指定的实数.

3.4 一般项级数的判敛法

对一个一般项级数来说，绝对收敛的判别等价于一个正项级数敛散性的判别，而条件收敛的判别较为困难，很多时候难以使用现成的判敛法，但判别敛散性的问题结合 $p-$ 级数的性质，本质上就是一个分析阶数的问题，可以考虑采取别的方法进行判别.

常用的一般项级数判敛法有：

(i) Leibniz 判别法：设 $\{u_n\}$ 单调递减恒大于 0，且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛，且级数的和不超过 u_1.

(ii) Dirichlet 判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列有界，$\{v_n\}$ 单调趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

(iii) Abel 判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\{v_n\}$ 单调有界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

3.5 例题

例题 **3.1** 判断下列级数的敛散性：

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} - \tan^2 \frac{1}{n}$

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-n}$

(iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}(a>b>0)$

(v) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

参考思路

(i) 这个级数的通项求 n 次根后表达式比较简单，考虑使用根值判别法，有：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n^2\left(-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{-\frac{1}{6}}<1$$

这里使用了 Taylor 展开来快速计算，由计算结果可得原级数收敛.

(ii) 注意到当 $n\to\infty$ 时 $\frac{1}{n}\to 0$，由等价无穷小可得 $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散，同理 $\tan^2\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan^2\frac{1}{n}$ 收敛，由于收敛级数加收敛级数结果仍是收敛的，那发散级数减收敛级数结果一定是发散的（否则移项过去会得到矛盾），也即原级数发散.

注意到这里使用 $\sim$ 符号表示两个级数同阶，在此讲义中还会大量使用这样的符号，需要指出更严格的写法应该是将 $\sim$ 两侧做比取极限来得到一个非零常数（等价于比阶判别法）.

(iii) 对这个级数需要一点小小的观察：这个 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 和 e 指数是有些关系的，细想就会发现这个通项应该不会趋于 0 啊，那我们来算一算：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}}{e^n}=e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$$

因为级数收敛的必要条件是通项趋于 0，所以原级数发散.

(iv) 这个级数的敛散性来自于一个经典的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}{\frac{1}{n}}=\ln\frac{a}{b}\neq 0$$

可知原级数和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同敛散从而是发散的.

在级数这个板块会大量引用数列中的结论，这是需要同学们留意的.

(v) 根号减根号是很难分析阶数的，但是根号加根号很容易，去掉根号以后又可以使用 Taylor 展开等工具，所以这里做一个有理化：

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}=\frac{\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}\sim\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

由此可见原级数是收敛的.

例题 3.2 设数列 $\{nu_n\}$ 极限存在且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(u_{n+1}-u_n)$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

参考思路 这类问题通常会是从级数的定义入手，我们考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(u_{n+1}-u_n)$ 的部分和：

$$\sum_{n=1}^{N} n(u_{n+1}-u_n)=\sum_{n=1}^{N} nu_{n+1}-\sum_{n=1}^{N} nu_n=\sum_{n=1}^{N+1}(n-1)u_n-\sum_{n=1}^{N} nu_n=Nu_{N+1}-\sum_{n=1}^{N} u_n$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(u_{n+1}-u_n)$ 收敛等价于部分和数列 $\sum\limits_{n=1}^{N} n(u_{n+1}-u_n)$ 有极限，而 $\{nu_n\}$ 极限存在可推出 $\{nu_{n+1}\}$ 极限存在，由极限的四则运算得 $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n$ 极限存在，而这恰好是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的定义，原命题得证.

例题 3.3 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_n}{k^2+n^2}$ 收敛.

参考思路 这里需要分别说明两个求和号对应级数的敛散性，对于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_n}{k^2+n^2}$ 来说，因为 $\frac{c_n}{k^2+n^2}\sim\frac{1}{k^2}$，所以该级数是收敛的，设 $u_n=\frac{c_n}{k^2+n^2}$，接下来考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

提出部分有关 n 的项得 $u_n=\frac{c_n}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$，这里去计算一个和式的值是困难的，但计算一个积分的值往往更简单，类比 Cauchy 积分判别法可得：

$$u_n=\frac{c_n}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\leq\frac{c_n}{n^2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{c_n}{n}$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}$ 收敛即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例题 3.4 设数列 $\{u_n\}$ 单调递减且恒大于 0，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$ 收敛.

参考思路 因为数列 $\{u_n\}$ 单调递减有下界 0，所以 $\{u_n\}$ 有极限，不妨令 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$，这里注意到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，由 Leibniz 判别法会得到交错级数收敛从而矛盾，所以 $u_n\geq A>0$，不等式变形得 $\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n\leq\left(\frac{1}{1+A}\right)^n<1$，由比较判别法即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$ 收敛.

例题 3.5 讨论下列级数的敛散情况：

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+(-1)^{n-1}}}$

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right), p>0$

(iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right),a,b,c>0$

参考思路

(i) 这里是一个对三角函数周期性的经典利用：

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1}-n)\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时 $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$ 单调递减趋于 0，所以这个级数只是将 $(-1)^n$ 藏了起来而已，我们可以用 Leibniz 判别法得知它是收敛的.

取绝对值的话，由等价无穷小知 $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{1}{n}$，所以原级数仅条件收敛.

(ii) 这个级数就很坏了：虽然是交错的，但去掉 $(-1)^n$ 以后不会单调，因此是很明确不能使用 Leibniz 判别法的，只能考虑其它手段.

结合之前所说，注意到该级数相邻两项是根号减根号的形式，可以通过通分和有理化转化为根号加根号的形式从而看出阶数，所以我们将此级数两项并作一项来考虑（当然这一点也可以理解成是从 Leibniz 判别法的证明获得启发），设 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+(-1)^{n-1}}}$，有：

$$\begin{aligned}u_{2n-1}+u_{2n}&=\frac{(-1)^{2n-2}}{\sqrt{2n-1+(-1)^{2n-2}}}+\frac{(-1)^{2n-1}}{\sqrt{2n+(-1)^{2n-1}}}=\frac{1}{\sqrt{2n}}-\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\\&=\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{2n(2n-1)}}=\frac{-1}{\sqrt{2n(2n-1)}(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n})}\sim\frac{-1}{n\sqrt{n}}\end{aligned}$$

可以看出 $u_{2n-1}+u_{2n}$ 是一个收敛的负项级数（这里是因为正项级数和负项级数的敛散性判别法没有本质区别），但这是不足以说明原级数收敛的！为了更好地解释这件事，我们用级数收敛定义来说话：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛是说其部分和数列 S_n 有极限，而我们证明的事情仅仅是 S_{2n} 这个子列有极限.

回忆数列极限中的经典结论：若一个数列的所有奇数下标项和偶数下标项构成的子列有相同的极限值，则可以推知该数列有极限，且其极限值也是这个值，那么我们只需补充说明 S_{2n-1} 也有极限，再注意到 $S_{2n-1}=S_{2n}-u_{2n}$，而显然 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n}=0$，所以这个补丁不难打上，我们就证明了原级数是收敛的（这个补丁也和 Leibniz 判别法的证明如出一辙）.

当然对原级数取绝对值的话其通项是 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 级别的，所以这只是一个条件收敛级数.

(iii) 这个级数就更难处理了，但判定敛散性本质上其实就是找出阶数，然后结合 $p-$ 级数的结论来做判别，秉承这个思想我们可以搬出分析阶数的终极武器 Taylor 展开：

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

这里先展开一项看看情况，当 $p>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 是绝对收敛的，对于 $o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 我们需要熟悉小 o 符号的内涵：它是在说这部分和 $\frac{1}{n^p}$ 做比之后取极限是趋于 0 的，那么结合比阶判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 当然也是绝对收敛的，因此原级数是绝对收敛的.

若 $p \le 1$ 则我们对 $o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 部分是无法做出判断的（可以理解成也是源于比阶判别法，在极限值为 0 时得不到同发散的结果），那么我们只能多放出一项：

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

当 $\frac{1}{2}<p\le 1$ 时，由 $p-$ 级数的结论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{2p}}$ 绝对收敛，而 $o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ 的判定与之前类似是绝对收敛的，因此三项相加原级数是条件收敛的.

若 $p\le\frac{1}{2}$，那么放出第二项也是不够的，需要继续 Taylor 展开，那么放出多少项才够呢？还是注意到这里的小 o，实际上我们应该放到小 o 可以下判断为止，也即找到一个最小的正整数 m 使得 $mp\ge 1$，然后放出前 m 项：

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+\frac{(-1)^n}{3n^{3p}}-\frac{1}{4n^{4p}}+\cdots+o\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right)$$

现在 $\frac{(-1)^n}{n^p},\frac{(-1)^n}{3n^{3p}},\cdots$ 这些项是条件收敛的，$-\frac{1}{2n^{2p}},-\frac{1}{4n^{4p}},\cdots$ 这些项是发散的，$o\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right)$ 是绝对收敛的，当一大堆级数相加时，如果有且仅有一项是发散的而其余项是收敛的，我们可以用反证法推知它们的和是发散的，但如果有两项及以上是发散的就不行了（因为两个发散级数的和可以是收敛的），但这里情况并非完全如此，$-\frac{1}{2n^{2p}},-\frac{1}{4n^{4p}},\cdots$ 都是发散的负项级数，用比较判敛法可知它们的和也是一个发散的负项级数，所以这些级数总体加起来会是发散的，我们最终得到结论：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right):\begin{cases}\text{绝对收敛} & p>1\\ \text{条件收敛} & \frac{1}{2}<p\le 1\\ \text{发散} & 0<p\le\frac{1}{2}\end{cases}$$

(iv) 设 $u_n=a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}$，直接对 $a^{\frac{1}{n}},b^{\frac{1}{n}},c^{\frac{1}{n}}$ 做 Taylor 展开得：

$$\begin{aligned}a^{\frac{1}{n}}&=1+\frac{\ln a}{n}+\frac{(\ln a)^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ b^{\frac{1}{n}}&=1+\frac{\ln b}{n}+\frac{(\ln b)^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ c^{\frac{1}{n}}&=1+\frac{\ln c}{n}+\frac{(\ln c)^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ u_n&=a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}=\frac{\ln\frac{a^2}{bc}}{2n}+\frac{2(\ln a)^2-(\ln b)^2-(\ln c)^2}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

这里只是一个看 u_n 的主项的问题，若 $\ln\frac{a^2}{bc}\neq 0$，则 u_n 不变号且 $|u_n|\sim\frac{1}{n}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，若 $\ln\frac{a^2}{bc}=0$，则 $\ln a=\frac{1}{2}(\ln b+\ln c)$，可得：

$$2(\ln a)^2-(\ln b)^2-(\ln c)^2=\frac{1}{2}(\ln b+\ln c)^2-(\ln b)^2-(\ln c)^2=\frac{1}{2}(\ln b-\ln c)^2$$

若 $b\neq c$ 则 $u_n\sim\frac{1}{n^2}$，若 $b=c$ 实际上可以推出 $u_n\equiv 0$，两种情况下皆有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

4 函数项级数

4.1 函数项级数一致收敛的性质

定义函数项级数的思路：无穷多个函数按次序相加，用部分和函数列的极限作为函数项级数的和（也可以理解成用每一点对应的数项级数的和作为函数项级数在一点处的取值）.

对于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 定义域内的一个点来说，函数项级数是否收敛就是一个普通的数项级数问题，若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛则称 x_0 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点，所有收敛点的集合称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域，这种收敛方式称为逐点收敛.

由于函数项级数的和是一个函数，我们自然关心这个函数的连续性、可导性和可积性，但这些性质只有逐点收敛是不能保障的，我们需要引入函数项级数的一致收敛，由于函数项级数由部分和极限函数定义，因此这个一致收敛的定义就是部分和函数列一致收敛的定义.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在定义域上一致收敛到 $S(x)$，此时有如下基本性质：

(i) 若 $u_n(x)$ 都在定义域上连续，则 $S(x)$ 在定义域上连续.

(ii) 若 $u_n(x)$ 都在定义域上连续，则 $S(x)$ 在定义域上可积，且积分可以和级数求和交换，也即可以逐项积分.

(iii) 若 $u_n(x)$ 都在定义域上连续可导，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 也一致收敛，则 $S(x)$ 在定义域上可导，且求导可以和级数求和交换，也即可以逐项求导.

4.2 函数项级数一致收敛的判别

常用的函数项级数判敛法有：

(i) Weierstrass 判别法：若存在收敛的非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 使得 $|u_n(x)| \le a_n$ 恒成立，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛.

(ii) Dirichlet 判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数列一致有界，$\{v_n(x)\}$ 单调一致趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛.

(iii) Abel 判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，$\{v_n(x)\}$ 单调一致有界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 收敛.

(iv) Cauchy 准则（充要条件）：$\forall \varepsilon > 0$，都 $\exists N > 0$，使得当 $n, m > N$ 时，有 $|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$ 恒成立，这里 $S_n(x)$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数列，之后也使用相同的记号.

(v) 余项准则（充要条件）：$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x} |S_n(x) - S(x)| = 0$，这里 $S(x)$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数，之后也使用相同的记号.

注意这里面所有涉及需要“一致”满足的性质，都是指对 x 是一致的，所以我们的处理办法可以全部转为找到一个与 x 无关的可以控制住研究对象的量，如果这个量满足不加“一致”字眼的性质，那么研究对象就满足对应的“一致”版本的性质了.

Cauchy 准则和余项准则是函数项级数一致收敛的充要条件，这类条件在判别函数项级数不一致收敛时也有用武之地，而前三个判别法只是充分条件，则没有这个功能，特别需要指出，Weierstrass 判别法并不是万能的：确实存在一致收敛的函数项级数，但可以严格证明找不到能够控制它的收敛非负数项级数.

4.3 幂级数的敛散性

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是特殊的函数项级数，幂级数的敛散性本质上只有三类情况：

(i) 在 $\mathbb{R}$ 上收敛且内闭一致收敛（也即在 $\mathbb{R}$ 内部的任意闭区间上一致收敛）.

(ii) 对某个正实数 R 在 $(-R, R)$ 上收敛且内闭一致收敛，在 $|x| > R$ 时发散，对 $x = \pm R$ 的敛散性需要单独讨论，这里 R 称为幂级数的收敛半径，$(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间，注意幂级数的收敛域不一定是 $(-R, R)$，还需考虑上 $\pm R$ 处的情况.

(iii) 只在 $x = 0$ 处收敛.

幂级数收敛半径可以用公式 $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 来计算，但要注意这个公式只适用于不缺项的幂级数，对于缺项幂级数只能按照定义进行计算.

4.4 幂级数的性质

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(0 < R \leq \infty)$，其和函数为 $S(x)$，此时有如下基本性质：

(i) $S(x)$ 在收敛域上连续.

(ii) $S(x)$ 在收敛区间上时可积的，对任意 $x \in (-R, R)$ 有：

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_0^x t^n \mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径也为 R.

(iii) $S(x)$ 在收敛区间上时可导的，对任意 $x \in (-R, R)$ 有：

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径也为 R.

4.5 函数的幂级数展开

设在 $x=x_0$ 的某个邻域内 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的和函数为 $S(x)$，则有 $a_n=\frac{1}{n!}S^{(n)}(x_0)$，换言之对一个函数其幂级数展开式是唯一的.

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内有任意阶导数，且 $f(x)$ 的 Taylor 展开余项极限为 0，则 $f(x)$ 在该邻域内可以展开为 Taylor 级数，形式上 Taylor 级数和 Taylor 展开的公式通项是相同的，但要注意理解这两个概念的本质区别，此外这部分会大量使用常见函数的 Taylor 展开公式，已经生疏了的同学要记得进行回顾.

求解 $f(x)$ 的幂级数展开通常有两类思路：

(i) 直接展开法：求出 $f(x)$ 的各阶导数通项进而得到 Taylor 级数，并证明 Taylor 展开的余项趋于 0 从而说明 Taylor 级数就是 $f(x)$ 的幂级数展开.

(ii) 间接展开法：利用 $f(x)$ 与已知的幂级数展开式的关系以及幂级数在收敛区间内可逐项积分、逐项求导等性质进行求解，通常来说间接展开法是我们的首选.

4.6 例题

例题 **4.1** 判断下列函数项级数在给定区间上是否一致收敛：

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}, x\in[0,1]$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}, x\in[0,\pi]$

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}, x\in(0,+\infty)$

参考思路

(i) 这个函数项级数长得像个等比级数，在收敛域上我们可以用等比级数求和公式写出它的和函数 $S(x)$ 来，当 $x\neq 0$ 时有：

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x)^n}=x\frac{\frac{1}{1+x}}{1-\frac{1}{x+1}}=1$$

而当 $x=0$ 时 $S(x)=0$，因此 $S(x)$ 甚至是不连续的，但原级数中每一项 $\frac{x}{(1+x)^n}$ 都是在定义域上连续的，根据一致收敛的函数项级数的性质，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$ 一致收敛的话会推出和函数 $S(x)$ 也连续，这就矛盾了，所以原级数不是一致收敛的.

(ii) 虽然这里通项有个 $\sin(nx)$，但一定不要被其迷惑了，这个三角函数不是来给我们提供正负交错的（这里可能会错误地联想到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 这个性状的数项级数），反倒是当 n 足够大时可以取到一个足够小但大于 0 的 x，使得在很长一段区间上这个级数的通项表现和调和级数一致，回忆在数列部分我们证明调和级数发散的手段可知，只要这段区间足够长，就可以借助 Cauchy 准则说明不满足一致收敛性了.

把这个论述严格化，对 $\forall N>0$，在 $x_0=\frac{1}{2(N+1)}\in[0,\pi]$ 处考虑 $|S_N(x_0)-S_{2(N+1)}(x_0)|$，有：

$$\begin{aligned}|S_N(x_0)-S_{2(N+1)}(x_0)|&=\left|\sum_{k=N+1}^{2(N+1)}\frac{\sin kx_0}{k}\right|=\sum_{k=N+1}^{2(N+1)}\frac{1}{k}\sin\frac{k}{2(N+1)}\\&\geq\sum_{k=N+1}^{2(N+1)}\frac{1}{k}\sin\frac{1}{2}=\sin\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{2(N+1)}\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\end{aligned}$$

那么可以取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$，由 Cauchy 准则即得原函数项级数不一致收敛.

解决这个问题还有另一个解决手段，就是利用 $\sup\limits_{x\in[0,\pi]}|\frac{\sin(nx)}{n}|=\frac{1}{n}$，这两种方法实际上都是在指出这个级数在坏点上总是会和调和级数表现一致，理解到这个核心最关键，至于具体证明手段的选择是随意的.

(iii) 对这个级数也需要一个好的观察：在 $(0,+\infty)$ 上总是能取到 x 使得 sin 的值是远离 0 的，再乘上 2^n 的话单项的函数值无法控制住，结合数项级数收敛的必要条件是通项趋于 0，事实上应该知道函数项级数收敛的必要条件是通项一致趋于 0（这点由定义即可得）.

对 $\forall N>0$，在 $x_0=\frac{2}{3^N\pi}$ 处都有 $u_N(x_0)=2^N\sin\frac{\pi}{2}=2^N>1$，那么可以取 $\varepsilon=1$，即得原函数项级数不一致收敛.

例题 4.2 设 u_n 在有界闭区间 $[a,b]$ 上非负连续，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 逐点收敛到 $S(x)$，证明 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值.

参考思路　因为 u_n 是非负的，所以 $S(x)$ 也是非负的，其在 $[a,b]$ 上一定有下界 0 从而有下确界 k，我们只需证明 $\exists x_0\in[a,b]$ 使得 $S(x_0)=k$ 即可.

根据下确界的定义，对 $\forall n>0$，都能找到 $x_n\in[a,b]$，使得 $S(x_n)<k+\frac{1}{n}$，也即数列 $\{S(x_n)\}$ 的极限就是 k，这里回忆数列中的结论：有界数列必有收敛子列，数列 $\{x_n\}$ 都落在 $[a,b]$ 中，所以它有一个收敛子列，不妨设就是 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0（否则将 $\{x_n\}$ 看成自己取收敛子列的结果即可），由保号性 $x_0\in[a,b]$，下面证明这个 x_0 即为所求.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和数列为 $S_n(x)$，固定一个 $\varepsilon>0$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 逐点收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=S(x_0)$，那么极限的定义告诉我们 $\exists N>0$ 使得当 $n>N$ 时有 $|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$，这里只保留 $S(x_0)<S_n(x_0)+\varepsilon$ 这部分.

注意到 $S_n(x)$ 只是有限个连续函数相加从而是连续的，对连续函数有 Heine 定理成立：若数列 $\{x_m\}$ 的极限是 x_0，则 $\{S_n(x_m)\}$ 的极限就是 $S_n(x_0)$，由极限定义 $\exists M>0$ 使得当 $m>M$ 时有 $|S_n(x_m)-S_n(x_0)|<\varepsilon$，这里只保留 $S_n(x_0)<S_n(x_m)+\varepsilon$ 这部分.

现在我们得到：

$$k\leq S(x_0)<S_n(x_0)+\varepsilon<S_n(x_m)+2\varepsilon\leq S(x_m)+2\varepsilon$$

其中最后一个不等号是由 u_n 非负且逐点收敛得到，取极限 $m\to\infty$ 即得 $k\leq S(x_0)\leq k+2\varepsilon$，因此只能是 $S(x_0)=k$，原命题得证.

这个问题中不能直接对 $\{S(x_n)\}$ 使用 Heine 定理，因为逐点收敛不能保证 $S(x)$ 是连续的，需要用部分和函数的连续性绕过这个坎.

例题 **4.3** 计算下列幂级数的收敛域：

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-4)^n}{n}(x-1)^{2n-1}$

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}(2x-1)^n$（只计算收敛区间）

(iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}x^n$

参考思路

(i) 直接按照公式计算收敛半径：

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{3^n+(-2)^n} = 3$$

因此原幂级数收敛区间为 $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$，不难进一步验证收敛域为 $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

(ii) 这里和上一题不同之处在于 $(-4)^n$ 成为了极限中的主项，且这是一个缺项的幂级数，不能够直接用系数做比或开根的极限来求解收敛半径.

但这是一个幂级数，我们可以利用幂级数丰富的性质来求解，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-4)^n}{n}(x-1)^{2n-1}$ 可以写作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x-1)^{2n-1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n}(x-1)^{2n-1}$ 两个级数的和，不难求出两个级数的收敛域分别为 $(1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1+\frac{1}{\sqrt{3}})$ 和 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$，所以原幂级数的收敛域就是 $(1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1+\frac{1}{\sqrt{3}})\cap[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

我们对这个上面取交集这一步做出解释：首先在交集内两个幂级数都收敛从而它们的和也收敛，而在 $(1-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2}, 1+\frac{1}{\sqrt{3}})$ 内两个级数一个收敛一个发散从而是发散的，只是在 $(-\infty, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}]\cup[1+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ 上两个发散级数的和我们没有办法直接做出判断，但是根据 Abel 定理，幂级数在一个发散点的外侧一定也是发散的，所以我们可以通过 $(1-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2}, 1+\frac{1}{\sqrt{3}})$ 上原级数发散直接推出其收敛域就是 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

从这里也可以看出，如果两个收敛区间中心相同的级数的收敛半径相等的话，是无法得知它们的和的收敛半径的，因为此时并没有两个收敛区间之间这一小段发散的间隙，从而无法使用 Abel 定理，例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 和 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 的和显然就在 $\mathbb{R}$ 上都收敛.

(iii) 这是一个缺项的幂级数，只能按照定义进行计算：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}(2x-1)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n|2x-1| = e|2x-1|$$

根据定义，幂级数收敛需要 $e|2x-1|<1$，可得原幂级数的收敛区间为 $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2e})$.

这个问题也可以通过换元将幂级数收敛区间的中点移动到原点后使用公式计算收敛半径来得到收敛区间，两种方法没有本质区别.

(iv) 对这个幂级数，由于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\sin n}{n^2}}$ 并不存在，故不能由此来求收敛半径，对幂级数求导和积分是不改变收敛半径的，这里只能利用这个方法进行求解.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}x^n$，则 $S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)\sin n}{n}x^{n-2}$，注意到 $\left|\frac{(n-1)\sin n}{n}\right|<1$，所以当 $|x|<1$ 时 $S''(x)$ 绝对收敛，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在，所以当 $x=1$ 时 $S''(x)$ 发散，根据 Abel 定理这足以推出 $S''(x)$ 的收敛半径为 R，那么 $S(x)$ 的收敛半径也是 R.

考虑当 $x=\pm1$ 时，$S(x)$ 显然是绝对收敛的，所以其收敛域为 $[-1,1]$.

在这个问题中需要注意，对幂级数求导和积分仅是不改变收敛半径（或收敛区间），但收敛域是确实可能改变的，例如 $S(x)$ 和 $S''(x)$ 的收敛域就不同.

例题 4.4 求实数 c 的取值范围，使得对任意实数 x 都有 $\frac{e^x+e^{-x}}{2}\leq e^{cx^2}$ 成立.

参考思路 这里直接考虑用幂级数展开不等式中的函数进行分析，可得 $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\leq\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}=e^{\frac{1}{2}x^2}$，由此可知当 $c\geq\frac{1}{2}$ 时原不等式成立.

当 $c<\frac{1}{2}$ 时，考虑极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-e^{cx^2}}{x^2}=\frac{1}{2}-c>0$，由极限的保号性即得当 x 足够小时总有 $\frac{e^x+e^{-x}}{2}>e^{cx^2}$，原不等式不会恒成立，所以 c 的取值范围就是 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

这个问题和接下来的两个问题本身并不是什么有趣的问题，收编进讲义中只是想展示幂级数在微积分中各个领域的功效：它能够方便快捷地将一个一般函数的问题转化为近似多项式函数的问题，这个泰勒展开的功能如出一辙.

例题 4.5 用幂级数表示定积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的结果.

参考思路 $\sin x$ 的泰勒级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，则 $\frac{\sin x}{x}$ 的幂级数展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$，再对其进行逐项积分：

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

所以原定积分的结果用幂级数表示即为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$.

例题 4.6 用幂级数求解微分方程初值问题：

$$\begin{cases}y''-2xy'-4y=0\\ y(0)=0\\ y'(0)=1\end{cases}$$

参考思路 我们不妨直接设微分方程的解是一个幂级数，也即设 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则逐项求导有 $y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},y''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$，代入微分方程中合并同类项可以得到一个关于

幂级数系数的代数方程：

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
\Rightarrow &\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0 \\
\Rightarrow &\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n)x^n = 0 \\
\Rightarrow &(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{2}{n+1}a_n
\end{aligned}$$

将 $y(0)=0, y'(0)=1$ 代入 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 得 $a_0=0, a_1=1$，那么根据上面的递推式可以得到所有系数为 $a_{2n}=0, a_{2n+1}=\frac{1}{n!}$，可计算 $y(x)$ 为：

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x^2)^n = xe^{x^2}$$

5 Fourier 级数

5.1 函数的 Fourier 级数展开

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积函数，其 Fourier 级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中：

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

奇函数的 Fourier 级数只有正弦部分，偶函数的 Fourier 级数只有余弦部分，此时的级数分别称为正弦级数和余弦级数.

对于有限区间上的非周期函数，将其做周期性延拓后即可当做周期函数处理，根据延拓方式的不同得到的级数结果也不同，比如做奇延拓会得到正弦级数，做偶延拓会得到余弦级数，做一般的非奇非偶延拓就得到一般的 Fourier 级数，具体应该选择何种延拓方式应该视实际情况来定.

5.2 Dirichlet 条件

如果周期函数 $f(x)$ 满足 Dirichlet 条件：

(i) 在区间 $[a,b]$ 内连续或只有有限个第一类间断点.

(ii) 在区间 $[a,b]$ 内至多只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 Fourier 级数收敛，设其和函数为 $S(x)$，有：

(i) 对 $f(x)$ 的连续点 x_0 有 $S(x_0)=f(x_0)$.

(ii) 对 $f(x)$ 的间断点 x_0 有 $S(x_0)=\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

(iii) 对区间端点有 $S(a)=S(b)=\frac{f(a^+)+f(b^-)}{2}$.

5.3 Fourier 级数的性质

可以证明，函数的 Fourier 级数可以做逐项积分，但一般不能做逐项求导，也即如果有 $f(x)$ 的 Fourier 级数：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

那么有 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$ 的 Fourier 级数为：

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\sim\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n\sin nx+b_n(1-\cos nx))$$

但得不到 $f'(x)$ 的 Fourier 级数为：

$$f'(x) \nsim \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

5.4 例题

例题 5.1 *将函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数，并根据结果计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.*

参考思路 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是偶函数，所以可以展开为余弦级数，计算系数得：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 是连续的，有 $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$，令 $x=\pi$ 即得 $\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

例题 5.2 *设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续可导，$f(\pi)=f(-\pi)$，若 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数系数，求 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数系数.*

参考思路 对 Fourier 级数是不可以逐项求导的，但在很多问题里面我们可能需要考虑导函数的 Fourier 级数系数，这个问题提供了一个求解的模板：可以先设出导函数的 Fourier 级数系数来，在通过逐项积分和原函数的 Fourier 级数系数进行对比，利用 Fourier 级数的唯一性得到结果.

设 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数系数为 $\{a_n'\}_{n=0}^{\infty},\{b_n'\}_{n=1}^{\infty}$，由于 $\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mid_{-\pi}^{\pi} = f(\pi)-f(-\pi)=0$，所以 $a_0'=0$，有：

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n'\cos nx + b_n'\sin nx$$

逐项积分得：

$$f(x)\sim C+\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a_n'}{n}\sin nx + \frac{b_n'}{n}\cos nx$$

因为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数系数为 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，由唯一性即得 $a_n'=nb_n, b_n'=-na_n$，这就是 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数系数.

例题 5.3 *设 f,g 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 Dirichlet 条件，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数系数，$\{c_n\}_{n=0}^{\infty},\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 g 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数系数，证明：*

(i)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n+b_nd_n)$$

(ii)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

参考思路

(i) 由 $g(x)$ 的 Fourier 级数系数为 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可得 $f(x)g(x)$Fourier 级数为:

$$f(x)g(x) \sim \frac{c_0}{2}f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(x)\cos nx + d_n f(x)\sin nx$$

由于 f, g 在 $[-\pi, \pi]$ 上都满足 Dirichlet 条件，所以上式在 $[-\pi, \pi]$ 上积分后两侧是相等的，将积分的结果除以 π 即得:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{c_0}{2}f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(x)\cos nx + d_n f(x)\sin nx\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{c_0}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right) + d_n\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n c_n + b_n d_n)
\end{aligned}$$

(ii) 只需将 $g(x) = f(x)$ 代入上一问的结论中即可.

这个公式称为 Parseval 定理，在 Fourier 分析和信号处理等领域都有丰富的应用，它表征了一个信号的能量在频域和时域一定是相等的.

例题 **5.4** 设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续可导，$f(\pi) = f(-\pi)$ 且 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$，证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x \le \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\mathrm{d}x$$

且等号成立当且仅当存在常数 a, b 使得 $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

参考思路　这个问题是对前两个问题的一个简单应用（实质上这几个问题应该一起出现，而前两个问题作为前两小问，这个问题作为最后一个小问）.

设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数系数，则 $\{nb_n\}_{n=1}^{\infty}, \{-na_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 f' 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数系数，注意到 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 给出 $a_0 = 0$，由 Parseval 定理得:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}((nb_n)^2 + (-na_n)^2) = n^2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)
\end{aligned}$$

所以显然有 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x \le \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\mathrm{d}x$，而等号成立当且仅当 $n > 1$ 时有 $a_n = b_n = 0$ 恒成立，这就等价于存在常数 a, b 使得 $f(x) = a\cos x + b\sin x$.