1、设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足$0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n - a_n = \cos b_n$

且级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

(1) 证：$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$　　(2) 证：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$收敛.

2、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$的收敛域及和函数.

3、将函数$f(x)=1-x^2\ (0\le x\le \pi)$展开成余弦级数，并求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

4、设数列$\{x_n\}$满足$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n}-1\ (n=1,2,\cdots)$，证$\{x_n\}$收敛.

5、求$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

6、求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$

7、求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(\sin\frac{1}{n})}$

8、证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$收敛.

9、将$f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$展开为$x$的幂级数.

10、设函数$f(x)$是周期为2π的周期函数，在$[-\pi,\pi]$上分段连续. 记

a_0, a_n, b_n是$f(x)$的Fourier系数.

定义$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$，$h>0$. 计算函数$f_h(x)$的Fourier系数.

1. 解：① 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛得 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

令 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$，等式 $\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 两边取极限得 $\cos a-a=1$.

令 $\varphi(x)=1-\cos x+x$，$\varphi(0)=0$. 由于 $\varphi'(x)=\sin x+1\geq 0$，故 $\varphi(x)$ 单调增加

由 $\varphi(x)=0$ 得 $x=0$，故 $\lim_{n\to\infty} a_n=a=0$.

法二. 由 $\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 得 $a_n=\cos a_n-\cos b_n>0$，从而 $0<a_n<b_n$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，即 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

② 由 $a_n=\cos a_n-\cos b_n$ 得 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=-\frac{2\sin\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\sin\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)}{b_n}\sim\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}$

由于 $0\leq\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}\leq\frac{b_n}{2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}$ 收敛

由比较 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

3、解：由于 $f(x)$ 为偶函数，$b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\,dx-\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(0-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x^2 d\sin nx\right)=-\frac{2}{n\pi}\left(x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin nx\,dx\right)$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\,d\cos nx=-\frac{4}{n^2\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}\cdot\pi(-1)^n=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\,dx=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

令 $x=0$，得 $f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

4. 解：$x_{n+1}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$　首先证明$\{x_n\}$的有界性

$x_n>0$，当$n=1$时，$x_1>0$，设$n=k$时，$x_k>0$，$x_{k+1}=\ln\frac{e^{x_k}-1}{x_k}$

其中$e^{x_k}-1>x_k$，可知$x_{k+1}>\ln 1=0$，对任意n，有$x_n>0$.

再证$\{x_n\}$的单调性

$$e^{x_{n+1}}-e^{x_n}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-e^{x_n}=\frac{e^{x_n}-1-x_ne^{x_n}}{x_n}$$

令$f(x)=e^x-1-xe^x$，$f'(x)=-xe^x$，$f'(x)=-xe^x<0$　$(x>0)$

故$x>0$时，$f(x)<f(0)=0$，从而$e^{x_{n+1}}-e^{x_n}<0$，$x_{n+1}-x_n<0$

故$\{x_n\}$单调递减.

$\{x_n\}$为单调递减有下界的数列，可知$\{x_n\}$收敛.

5. 解：当$n>1$时，$\ln n<n$，于是$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>0$，对于级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$，故级数发散．原级数发散.

若用达朗贝尔判别法，则有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，无明确结论.

7. 解：考虑$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}$，由于$\dfrac{\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2(\sin\frac{1}{n})}}=\left(\dfrac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}\right)^2$

且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=1$

故$\frac{1}{\ln^2(\sin\frac{1}{n})}\sim\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}=\frac{1}{\ln^2 n}$

又当$n>1$时，$0<\ln n<\sqrt{n}$．故$\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$．由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故原发散.

8. 解：此级数首先出现三个负项，之后出现五个正项，如此下去，若将这些相邻且具有相同符号的几项合并成一项，则所得的新级数为一交错级数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right) \quad ①$$

易证 $\frac{2}{k+1}<\underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots}_{k\text{项}}+\underbrace{\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}_{k+1\text{项}}<\frac{2}{k}$

开头 k 项的和小于 $k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$，后面 $k+1$ 项的和小于 $(k+1)\cdot\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}$

故整个和小于 $\frac{2}{k}$. 左边可由整个和大于 $k\cdot\frac{1}{k^2+k}+(k+1)\cdot\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{2}{k+1}$ 得

故级数①的通项当 $k\to\infty$ 时趋于0，且绝对值单调减小，由莱布尼兹判别法可知级数收敛

注意：原级数的部分和恰好包含在级数①的某相邻两部分和之间，由①的收敛性知此两相邻部分和趋于同一极限，故原级数部分和有极限，从而原级数收敛。显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|$ 发散，故条件收敛.