微积分期末讲座习题（2021 年 6 月 10 日）

考点 1 重积分的计算

一、重积分的对称性与大小比较
二、直角坐标系下计算重积分，积分换序，物理意义，不等式法
三、极坐标系下计算二重积分，柱坐标系，球坐标系计算三重积分

1. 已知区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\}$，记

$$I_1=\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_2=\iint_D (x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则（　　）. (A) $I_1<I_2$　(B) $I_1=I_2$　(C) $I_1>I_2$　(D) I_1 与 I_2 大小关系不确定

2. 已知空间区域

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant 0\},$$

$$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\},$$

则（　　）.

(A) $\iiint_{\Omega_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\iiint_{\Omega_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$　(B) $\iiint_{\Omega_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\iiint_{\Omega_2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\iiint_{\Omega_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$　(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\iiint_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

3. 已知区域 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 2\}$，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x+y>1,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. 设 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 围成，将

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

化为直角坐标系下的累次积分.

5. 计算积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y\dfrac{\cos z}{1-z}\mathrm{d}z$.

6. 交换积分次序: $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

（1）先积 y，再积 x，最后积 z；（2）先积 x，再积 z，最后积 y.

7.（1）已知区域$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 2z\}$，计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

（2）已知区域Ω由锥面$x^2+(y-z)^2=(1-z)^2,(0\leqslant z\leqslant 1)$与平面$z=0$围成，计算$\Omega$的形心.

8. 已知区域$D=[0,1]\times[0,1]$，函数$f(x,y)\in C^2(D)$，且$f(1,y)=0$，$\dfrac{\partial f(x,1)}{\partial x}=0$，$|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)|\leqslant 1$. 证明：$|\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y|\leqslant\dfrac{1}{4}$.

考点 2　第一型曲线积分与第一型曲面积分

9. 计算$I=\oint_L[(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]dl$，其中$L$是圆周$x^2+(y-1)^2=1$。

10. $\oint_C x^2dl$，　$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$.

11. 曲线$y=\ln x(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$的线密度$\rho(x)=x$，求该曲线的质量.

12. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为上半球面$x^2+y^2+z^2=1\,(z\geqslant 0)$.

13. 求柱面$x^2+y^2=1$位于平面$z=0$与$z=x+2$之间的面积.

14. 计算$\iint\limits_{S}xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S$，其中$S$为$x^2+y^2+z^2=a^2$（$x,y,z\geqslant 0$）

15. 证明$\oiint\limits_{S}f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)dt$，$S:x^2+y^2+z^2=1,$ f连续.

考点 3　第二型曲线积分与格林公式

16. 设曲线L为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 逆时针方向为正, 则$\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$_______.

17. 证明$\oint_L\cos(\vec{y},\vec{n})dl=0$。其中 L 为简单光滑的平面封闭曲线，$\vec{n}$为曲线的外法线方向。

18. 设$D_t=\{(x,y)\in R^2\,\big|\,x^2+y^2\le t^2,t>0\}$，　$f(x,y)$在D_t上连续，在D_t内可微，$f(0,0)=1$，D_t的正向边界为C_t。若$f(x,y)$在D_t上满足方程　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}f(x,y),$ 设

曲线 C_t 的外法矢量为 $\vec{n_0}(t)$，则极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1-\cos t}\oint_{C_t}\dfrac{\partial f}{\partial n_0}dl=$（　　）。

19. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数，在 D 的边界 ∂D 上

$f(x,y)=0$。证明：$\iint\limits_D f(x,y)(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2})dxdy\leqslant 0$。

20. 求 $I=\int\limits_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+[\mathrm{e}^x\cos y-a\,x]\mathrm{d}y$，其中， a,b 为正常数，

L 为沿 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 从 $A(2a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的曲线，顺时针为正.

考点 4　第二型曲面积分与高斯公式，斯托克斯公式

21. $I=\iint\limits_\Sigma xzdy\wedge dz+2zydz\wedge dx+3xydx\wedge dy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$ 的上侧。

22. $I=\iint\limits_\Sigma \dfrac{1}{b^2}xy^2dy\wedge dz+\dfrac{1}{c^2}yz^2dz\wedge dx+\dfrac{1}{a^2}zx^2dx\wedge dy$，其中 Σ 为曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧。

23. 设曲线 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4x\,(z\ge 0)$ 与 $x^2+y^2=2x$ 的交线，从 z 轴正方向看上去 L 为逆时针方向，计算曲线积分

$$I=\oint\limits_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(\mathrm{z}^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{dz}。$$