微积分A(2)期末复习

经73班　　罗承扬

目录

contents

1 / 重积分

- 重积分的几何意义、物理意义
- 重积分的定义和基本性质
- 重积分化累次积分
- 交换积分次序
- 极坐标下二重积分的计算，球坐标下三重积分的计算
- 一般的变量替换方法

二重积分的几何意义：曲顶柱体的体积

设曲面$S{:}z=f(x,y),(x,y)\in D$.求以D为下底,以曲面S为上顶的曲顶柱体Ω的体积$\mathrm{V}(\Omega)$.

$$\mathrm{V}(\Omega)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

重积分的物理意义：不均匀物体的质量

薄板D上点(x,y)处的密度为$f(x,y)$,求薄板质量.

物块D上点(x,y,z)处的密度为$f(x,y,z)$,求物块质量.

重积分的定义：Riemann和的极限

Def.f在$D=[a,b]\times[c,d]$上有定义，对D的任意分划

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<x_k=d,$$

及任意$P_{ij}(\xi_{ij},\eta_{ij})\in D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j], 1\le i\le n,$

$1\le j\le k$, Riemann和$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$的极限存在

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j.$$

重积分的定义：Riemann和的极限

例. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{i}{n^3}e^{\frac{ik}{n^2}}=$ ______

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j.$$

解：原式 $=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{i}{n^3}e^{\frac{ik}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\times\frac{i}{n}e^{\frac{ik}{n^2}}=\int_0^1\int_0^1 xe^{xy}dxdy$

$\frac{i}{n}\to x \qquad \frac{k}{n}\to y$

重积分的重要性质：中值定理

(积分中值定理)$D\subset\mathbb{R}^2$连通、有界闭，∂D为零面积集，$f\in C(D)$，则存在$(\xi,\eta)\in D$, s.t.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\sigma(D).$$

例. $\lim_{r\to0+}\dfrac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2}e^x\cos y\,dxdy=$ $\underline{\quad\pi\quad}$

解：原式 $=\lim_{r\to0+}\dfrac{1}{r^2}\sigma\left(x^2+y^2\le r^2\right)e^\eta\cos\xi=\lim_{r\to0+}\dfrac{1}{r^2}\pi r^2e^\eta\cos\xi$

$=\lim_{r\to0+}\pi e^\eta\cos\xi=\pi e^0\cos 0=\pi$□

二重积分的计算：化累次积分

Thm. 设$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，若

$$D=\left\{(x,y)\middle| a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\},$$

其中$y_1(x), y_2(x)\in C([a,b])$.则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

若$D=\left\{(x,y)\middle| c\le y\le d, x_1(y)\le x\le x_2(y)\right\},$

其中$x_1(y), x_2(y)\in C([c,d])$.则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x. \ \square$$

三重积分的计算：化累次积分

1) 化为"先一后二"型累次积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

$z_1(x,y), z_2(x,y)$表示固定x, y后，z的变化范围。

即$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$

重积分的计算：化累次积分

2)化为"先二后一"型累次积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \left[\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)dxdy \right] dz$$

$$= \int_c^d dz \iint_{\Omega_z} f(x,y,z)dxdy.$$

Ω_z表示固定z后, x, y的变化范围

重积分的计算：化累次积分　Note.积分次序有很多种.

(1)根据区域的形状决定积分次序

设区域 D 由曲线 $x=1+\sqrt{y}$ 和直线 $y=1-x$ 及 $y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (x-1)y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

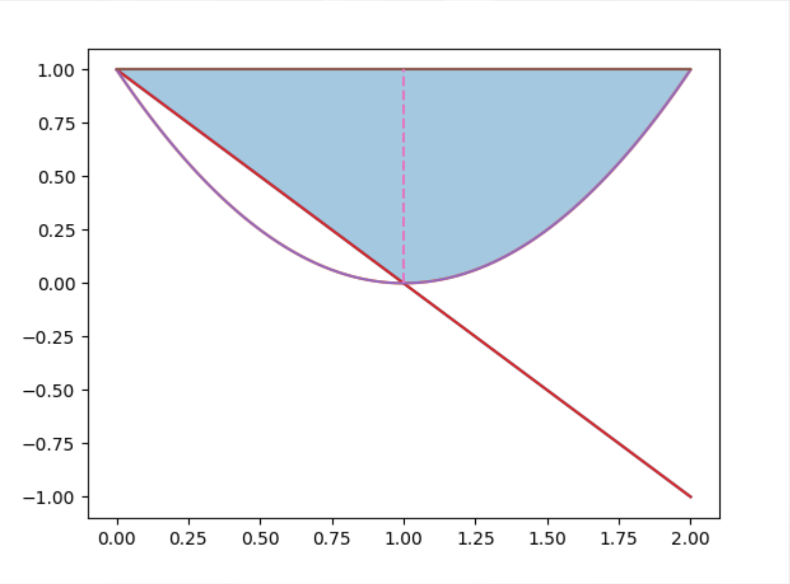
$$x=1+\sqrt{y}\Leftrightarrow y=(x-1)^2$$

$$\iint\limits_D (x-1)ydxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 (x-1)ydy+\int_1^2 dx\int_{(x-1)^2}^1 (x-1)ydy$$

$$=\int_0^1 (x-1)\frac{1}{2}\left(1-(x-1)^2\right)dx+\int_1^2 (x-1)\frac{1}{2}\left(1-(x-1)^4\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)-(x-1)^3dx+\frac{1}{2}\int_1^2 (x-1)-(x-1)^5dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{4}(x-1)^4\right)\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{6}(x-1)^6\right)\Bigg|_1^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{24}$$



重积分的计算：化累次积分　Note.积分次序有很多种.

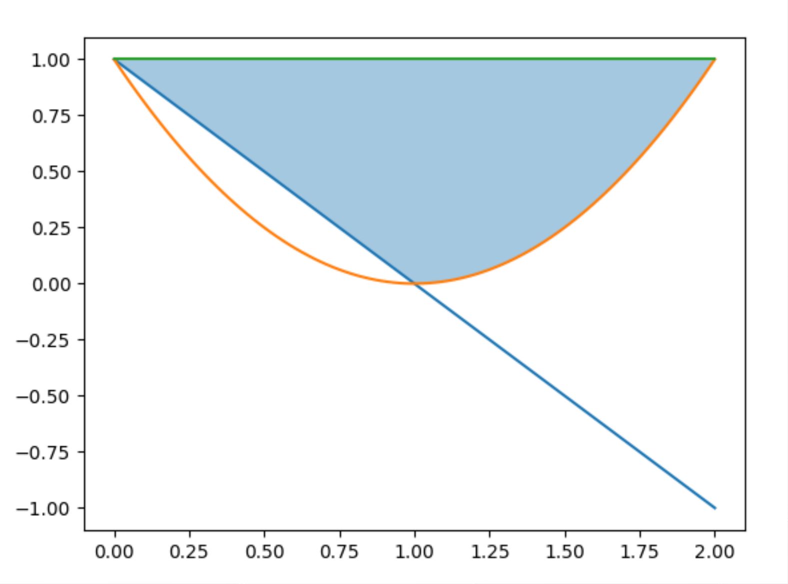
(1) 根据区域的形状决定积分次序

设区域 D 由曲线 $x=1+\sqrt{y}$ 和直线 $y=1-x$ 及 $y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (x-1)y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$$\iint\limits_D (x-1)ydxdy=\int_0^1 ydy\int_{1-y}^{1+\sqrt{y}}(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 y(x-1)^2\Big|_{1-y}^{1+\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y\left(y-y^2\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2-y^3dy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1/24$$



$$=\frac{1}{24}$$

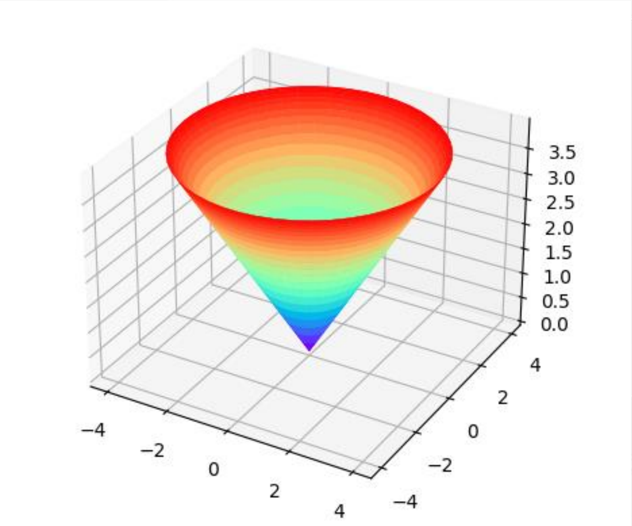
重积分的计算：化累次积分 Note.积分次序有很多种.

(2)根据被积函数的性质决定积分次序

例: 计算 $\iiint_V \frac{\sin z}{z} dxdydz, V = \{(x, y, z): \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 4\}$

解(先一后二)

$$\iiint_V \frac{\sin z}{z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4} \frac{\sin z}{z} dz, D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 16\} \ldots$$



重积分的计算：化累次积分 Note.积分次序有很多种.

(2)根据被积函数的性质决定积分次序

例[合适的积分次序]:计算$\iiint_V \frac{\sin z}{z} dxdydz, V=\{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4\}$

(先二后一)！

$$\iiint_V \frac{\sin z}{z} dxdydz = \int_0^4 dz \iint_D \frac{\sin z}{z} dxdy, D=\{(x,y): x^2+y^2 \le z^2\}$$

$$= \int_0^4 \frac{\sin z}{z} dz \iint_D dxdy \quad = \int_0^4 \frac{\sin z}{z} \pi z^2 dz \quad = \pi \int_0^4 z \sin z dz$$

$z\sin z$的一个原函数是$-z\cos z+\sin z$ $\quad = \pi(\sin 4 - 4\cos 4)$

重积分的计算：化累次积分

1) 化为"先一后二"型累次积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$$

$z_1(x,y), z_2(x,y)$表示固定x, y后, z的变化范围。

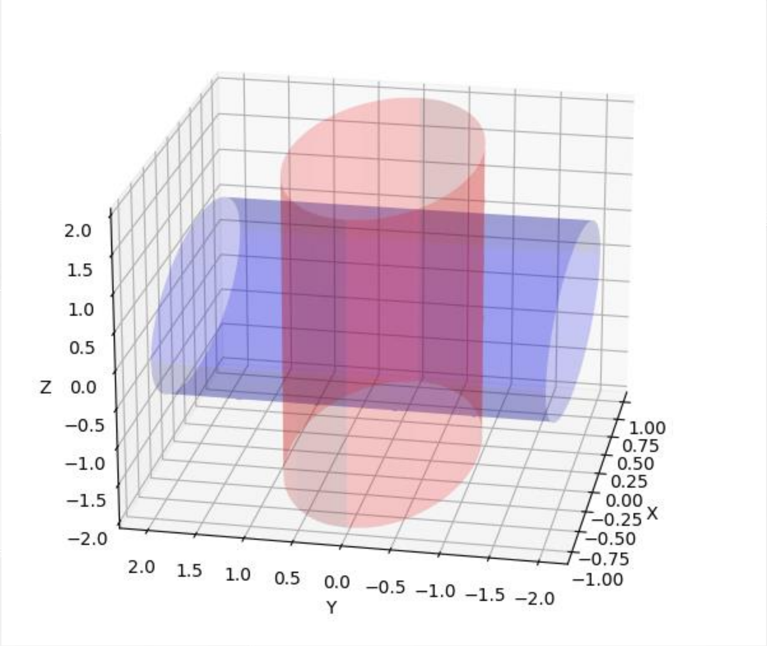
2)化为"先二后一"型累次积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d\left[\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)dxdy\right]dz$$

Ω_z表示固定z后, x, y的变化范围

重积分的计算：化累次积分

例：计算 $\iiint_V 1dxdydz, V: x^2+y^2\le a^2, x^2+z^2\le a^2$



解. $-\sqrt{a^2-x^2}\le z\le\sqrt{a^2-x^2}$

$$\text{原式}=\iint_{x^2+y^2\le a^2} dxdy\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz$$

$$=2\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy \quad =2\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{dy}$$

$$=4\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{16}{3}a^3$$

重积分的计算：化累次积分

例：计算 $\iiint_V 1dxdydz, V: x^2+y^2\le a^2, x^2+z^2\le a^2, y^2+z^2\le a^2$

解. $-\sqrt{a^2-x^2}\le z\le\sqrt{a^2-x^2}\quad -\sqrt{a^2-y^2}\le z\le\sqrt{a^2-y^2}$

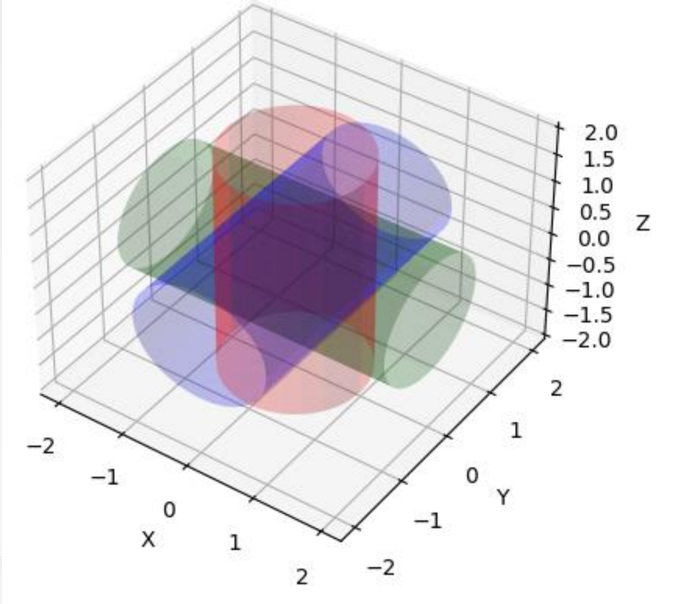
$$\therefore -\min(\sqrt{a^2-y^2},\sqrt{a^2-x^2})\le z\le \min(\sqrt{a^2-y^2},\sqrt{a^2-x^2})$$

$$\text{原式}=\iint_{x^2+y^2\le a^2} dxdy\int_{-\min(\sqrt{a^2-y^2},\sqrt{a^2-x^2})}^{\min(\sqrt{a^2-y^2},\sqrt{a^2-x^2})} dz$$

$$=2\iint_{x^2+y^2\le a^2}\min(\sqrt{a^2-y^2},\sqrt{a^2-x^2})dxdy$$

$$=2\iint_{x^2+y^2\le a^2,x^2\le y^2}\sqrt{a^2-y^2}dxdy+2\iint_{x^2+y^2\le a^2,x^2\ge y^2}\sqrt{a^2-x^2}dxdy$$

$$=4\iint_{x^2+y^2\le a^2,x^2\le y^2}\sqrt{a^2-y^2}dxdy$$



重积分的计算：化累次积分

例：计算$\iiint_V 1dxdydz, V: x^2+y^2\le a^2, x^2+z^2\le a^2, y^2+z^2\le a^2$

解. 原式$=4\iint_{x^2+y^2\le a^2, x^2\le y^2}\sqrt{a^2-y^2}dxdy=16\iint_{x^2+y^2\le a^2, 0\le x\le y}\sqrt{a^2-y^2}dxdy$

$$x^2+y^2\le a^2, 0\le x\le y \Leftrightarrow \quad r^2\le a^2, 0\le r\cos\theta\le r\sin\theta \Leftrightarrow$$

$$0\le r\le a, 0\le\cos\theta\le\sin\theta \Leftrightarrow 0\le r\le a, \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$=16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}\,rdr=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}\,dr^2$$

$$=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{3\sin^2\theta}\left(a^2-r^2\sin^2\theta\right)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=a}d\theta=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a^3\left(1-\cos^3\theta\right)}{3\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{16}{3}a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\cos^3\theta\right)}{\sin^2\theta}d\theta$$

重积分的计算：化累次积分

例：计算 $\iiint_V 1dxdydz, V: x^2+y^2\le a^2, x^2+z^2\le a^2, y^2+z^2\le a^2$

解. 原式 $=\frac{16}{3}a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\cos^3\theta\right)}{\sin^2\theta}d\theta=\frac{16}{3}a^3\left(3-3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(16-8\sqrt{2}\right)a^3$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\cos^3\theta\right)}{\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1-\sin^3\theta\right)}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta=$$

$$\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}d\cos\theta=1+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\cos\theta=1+\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1-t^2}{t^2}dt=$$

$$1+\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t^2}-1dt=1+\left(-\frac{1}{t}-t\right)\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1+\left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{1}{1}-1\right)=3-3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

交换积分次序

二重积分：用作图法来交换积分次序

三重积分？

题 求解如下累次积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_y^1 y\sqrt{1+z^4}dz$

三重积分交换积分次序的问题：

- 二重积分是做出**平面图**实现交换积分次序
- 三重积分做出来是**立体图，不好去想象积分区域**

固定外层变量的时候，内部的两层积分可以看成一个（含参）二重积分，即可套用二重积分交换次序的办法。

题2 求解如下累次积分$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_y^1 y\sqrt{1+z^4}dz$

$\because y\le z\le 1, x\le y\le 1,$

$\Rightarrow x\le y\le z, x\le z\le 1$

$$\because \int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_y^1 y\sqrt{1+z^4}dz=\int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_x^z y\sqrt{1+z^4}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_x^z y\sqrt{1+z^4}dy=\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_x^z y\sqrt{1+z^4}dy=\int_0^1\sqrt{1+z^4}dz\int_0^z dx\int_x^z ydy$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+z^4}dz\int_0^z dx\int_x^z ydy=\int_0^1\sqrt{1+z^4}dz\int_0^z\frac{z^2-x^2}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1+z^4}\left(z^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{x=0}^{x=z}dz\quad=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1+z^4}\,\frac{2}{3}z^3dz$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+z^4}\,\frac{1}{3}z^3dz=\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+z^4}dz^4$$

$$=\frac{1}{18}(2^{3/2}-1)$$

二重积分的极坐标换元：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{rdrd}\theta.$$

找到E的表达式非常重要！

$dxdy = rdrd\theta$ （换元之后，r，θ的范围弄错，导致结果出错）

例(2020期末微A): 求$I=\iint_D \left|\frac{y}{x}\right| \mathrm{dxdy}. D:\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 2x\}$

$$D:\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 2x\}\Leftrightarrow E:\{(r,\theta):1\le r\le 2\cos\theta\}$$

$$\cos\theta\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

~~即~~ $\cancel{:\{(r,\theta):1\le r\le 2\cos\theta,\theta\in[0,2\pi]\}}$?

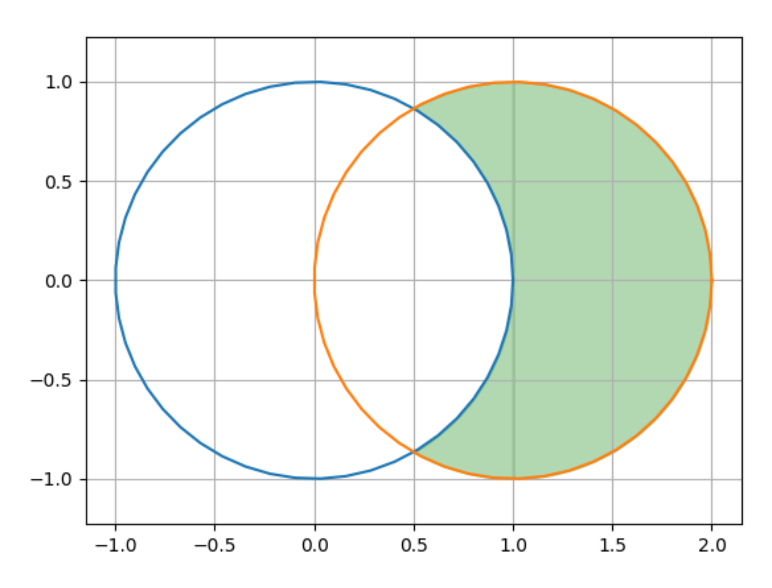
$$\left|\frac{y}{x}\right| dxdy=|\tan\theta|\, rdrd\theta$$

$$I=\iint_D\left|\frac{y}{x}\right|\mathrm{dxdy}=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}|\tan\theta|\, rdr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}|\tan\theta|\, d\theta\int_1^{2\cos\theta}rdr=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}|\tan\theta|(4\cos^2\theta-1)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta(4\cos^2\theta-1)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\cos\theta\sin\theta-\tan\theta d\theta$$

$$=2\sin^2\theta-\ln|\cos\theta|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{2}-\ln 2$$

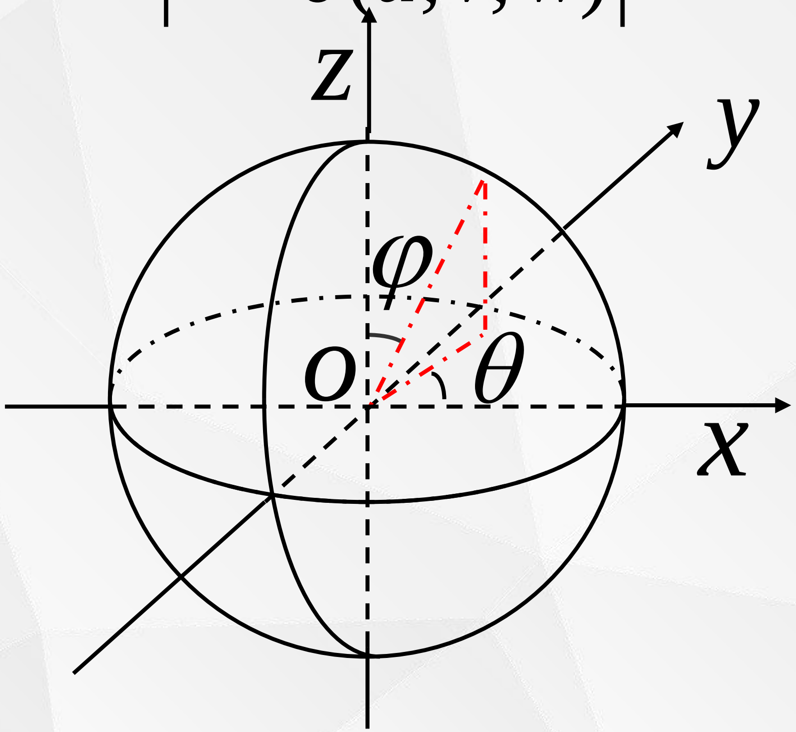


三重积分的球坐标换元：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega^*} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw.$$

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\varphi, \end{cases} \left(\begin{array}{l} \rho\ge 0, \\ 0\le\varphi\le\pi, \\ 0\le\theta<2\pi \end{array}\right)$$



$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\rho^2\sin\varphi.$$

三重积分的球坐标换元：

例.(2020微A期末)计算如下三重积分的值

$$\iiint_V \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz, V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

解. $\iiint_V \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^3}\rho^2\sin\varphi d\rho$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^3}\rho^2 d\rho=2\pi\times\frac{2}{3}\times\int_0^1\sqrt{1-\rho^3}d\rho^3$$

$$=\frac{4\pi}{3}\frac{2}{3}(1-\rho^3)^{3/2}\Big|_{\rho=1}^{\rho=0}=\frac{8\pi}{9}$$

•代数法

三重积分的球坐标换元：

例. [球坐标代换下, 确定范围-更复杂的例子]

计算如下三重积分的值$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydzV=\{(x,y,z):x^2+y^2+(z-1)^2\le 1, z\ge 1, y\ge 0\}$

分析. 在球坐标代换下,

$$V=\{(x,y,z):x^2+y^2+(z-1)^2\le 1, z\ge 1, y\ge 0\}\Leftrightarrow\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 2z, z\ge 1, y\ge 0\}$$

$$\Leftrightarrow\{(\rho,\theta,\varphi):\rho^2\le 2\rho\cos\varphi, \rho\cos\varphi\ge 1, \rho\sin\varphi\sin\theta\ge 0\}$$

$$\Leftrightarrow\{(\rho,\theta,\varphi):\rho\le 2\cos\varphi, \rho\cos\varphi\ge 1, \rho\sin\varphi\sin\theta\ge 0\}$$

$$\Leftrightarrow\{(\rho,\theta,\varphi):\frac{1}{\cos\varphi}\le\rho\le 2\cos\varphi, \sin\varphi\sin\theta\ge 0\}$$

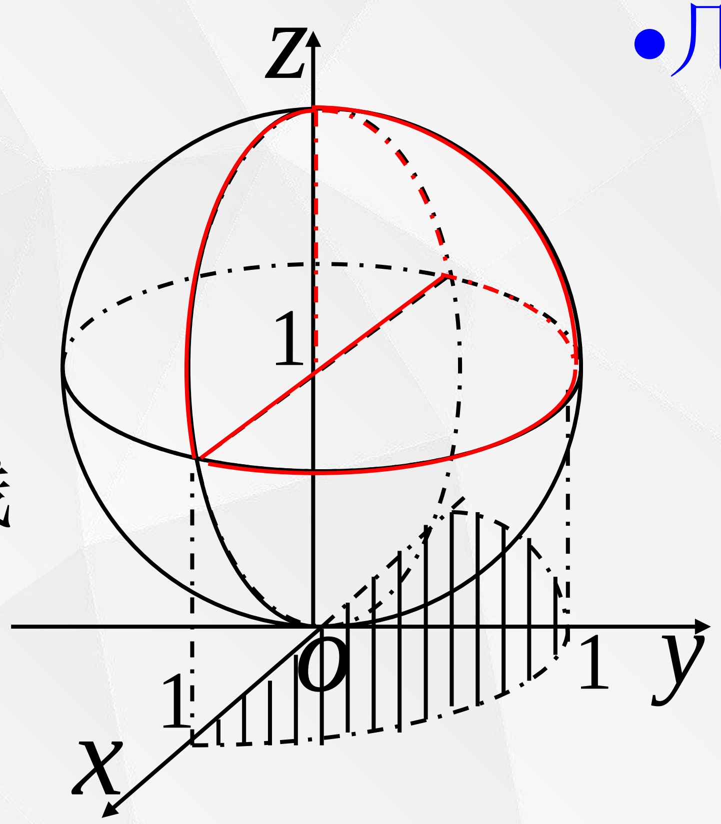
$$2\cos\varphi\ge\frac{1}{\cos\varphi}, \cos\varphi\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\{(\rho,\theta,\varphi):\frac{1}{\cos\varphi}\le\rho\le 2\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le\theta\le\pi\}$$

$$\Rightarrow\cos\varphi\ge\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{即}0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\sin\varphi\ge 0, \sin\theta\ge 0, \text{得到}\theta\in[0,\pi]$$

•几何法

令 $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi. \end{cases}$



则 •$0 \le \theta \le \pi$.(这是因为$y \ge 0$.)

•$0 \le \varphi \le \pi/4$. 这是因为交线

$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 上

$\begin{cases} z = \rho\cos\varphi = 1 \\ x^2 + y^2 = \rho^2\sin^2\varphi = 1, \end{cases}$ 此时$\varphi = \pi/4$.

•$1/\cos\varphi \le \rho \le 2\cos\varphi$. 因为平面$z = 1$上, $\rho = 1/\cos\varphi$,

球面$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$上, $\rho = 2\cos\varphi$.

故变量替换后积分区域为

$$\left\{(\rho,\theta,\varphi)\left|\begin{array}{l}0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le\pi/4,\\ 1/\cos\varphi\le\rho\le 2\cos\varphi.\end{array}\right.\right\}$$

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{1/\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho\sin\varphi d\rho$$

$$=\pi\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\sin\varphi\left[4\cos^2\varphi-1/\cos^2\varphi\right]d\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{3}(1-\frac{1}{2\sqrt{2}})-\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).\square$$

球坐标换元并非总是最好的

例: $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}},\quad (h>R).$

解: 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z.$

$$I=\int_{-R}^{R}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$=\pi\int_{-R}^{R}dz\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{dr^2}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}\left[\sqrt{R^2+h^2-2hz}-(h-z)\right]dz=\frac{4\pi R^3}{3h}.\square$$

重积分的变量替换方法

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega^*} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw.$$

- 注意： （1）行列式带有绝对值；
- （2）换元完成后，确定u，v，w的范围很重要

重积分的变量替换方法

计算如下几何体的体积：$\sum_{i=1}^{3}(a_i x+b_i y+c_i z)^2\le r^2$ 其中，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\ne 0$

解. 令 $w_i=a_i x+b_i y+c_i z_i, i=1,2,3$ 区域变为 $\sum_{i=1}^{3} w_i^2\le r^2$

$$\because \det\left(\frac{\partial(w_1,w_2,w_3)}{\partial(x,y,z)}\right)=|A|,\therefore \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(w_1,w_2,w_3)}\right)=\frac{1}{|A|}$$

$$\therefore \iiint_V 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'}\frac{1}{|A|}\mathrm{d}w_1 dw_2 dw_3 \quad =\frac{4\pi r^3}{3|A|}$$

思考题(微积分A教材P172-14).

$H(x)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_i x_j, A=(a_{ij})_{3*3}$ 正定.计算 $\iiint\limits_{H(x)\le 1} e^{\sqrt{H(x)}}dx_1dx_2dx_3$ 　　提示：A 可以对角化

重积分的变量替换方法：正交变换

综述：进行了变量替换后，被积函数和积分区域同时变换

- 有时候函数好积了，但是区域变坏了。
- 正交变换的好处是，对于圆来说，正交变换下的新图像还是圆。
- 所以，我们可以在不改变积分区域的情况下，改变被积函数。利用合适的正交变换，把被积函数优化。

重积分的变量替换方法：正交变换

9. 设 a, b 不同时为零．求证：$\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)dxdy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dt$．

$$t=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$x^2+y^2\le 1 \Leftrightarrow t^2+s^2\le 1$$

$$s=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{左边}=\iint_{t^2+s^2\le 1} f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dsdt=\int_{-1}^{1}dt\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)ds=\int_{-1}^{1} f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dt\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}}ds$$

$$=\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-t^2}\,f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dt$$

对称性在简化重积分计算时的应用

(对称性)设$f \in R(D)$, D关于OX轴对称,

- 若$f(x,y)$关于y为奇函数,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$;
- 若$f(x,y)$关于y为偶函数,记D_1为D位于OX轴上方的部分,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(轮换不变性) 若$D \subset \mathbb{R}^2$关于x,y是轮换对称的,

即$(x,y) \in D \Leftrightarrow (y,x) \in D$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对称性在简化重积分计算时的应用

D为单位圆盘,则

$$(1)\iint\limits_D x^{2021}y^{2021}dxdy = \underline{\quad 0 \quad};$$

$$(2)\iint\limits_D \frac{x^{2021}}{x^{2021}+y^{2021}}dxdy = \underline{\qquad};$$

$$\text{解}:(2)\, I \triangleq \iint\limits_D \frac{x^{2021}}{x^{2021}+y^{2021}}dxdy = \iint\limits_D \frac{y^{2021}}{x^{2021}+y^{2021}}dxdy$$

$$\therefore I \triangleq \frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{x^{2021}+y^{2021}}{x^{2021}+y^{2021}}dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D 1dxdy = \frac{1}{2}\pi$$

6)(轮换不变性)设$f\in R(\Omega)$, Ω关于xy轮换不变, 即$(x,y,z)\in\Omega\Leftrightarrow(y,x,z)\in\Omega$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} f(y,x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

7)(对称性)设$f\in R(\Omega)$, Ω关于oxy平面对称,

- 若$f(x,y,z)$关于z为奇函数, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0;$$

- 若$f(x,y,z)$关于z为偶函数, 记Ω_1为Ω位于oxy平面上方的部分, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

例(对称性):计算$\iiint_V x+|y|+|z|\,dxdydz, V=\{(x,y,z):|x|+|y|+|z|\le 1\}$

由对称性,$\iiint xdxdydz=0$ $\quad\therefore$ 原式 $=\iiint |y|+|z|\,dxdydz$

由轮换不变性,$\iiint |x|\,dxdydz=\iiint |y|\,dxdydz=\iiint |z|\,dxdydz$

$$\therefore \text{原式}=2\iiint\limits_V |x|\,dxdydz \quad =2\times 8\times \iiint\limits_{0\le x+y+z\le 1} xdxdydz \quad =16\times \iint\limits_{0\le x+y\le 1} dxdy\int_0^{1-x-y} xdz$$

$$=16\times \iint\limits_{0\le x+y\le 1} x(1-x-y)dxdy=16\times\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x(1-x)-xydy \;=16\times\int_0^1 x(1-x)y-\frac{1}{2}xy^2\Big|_{y=0}^{y=1-x}\quad dx$$

$$=8\times\int_0^1 x(1-x)^2dx \;=8\times\int_0^1(1-y)y^2dy=8\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{2}{3}$$

2/ 第一型曲线/曲面积分

- 第一型曲线积分（曲面积分）的定义
- 计算方法
- 对称性的应用

Def. 设曲线L长度有限,$f(x,y,z)$是定义在L上的函数.将L分成若干段$L_1,L_2,\cdots,L_n$,用$\Delta l_i(i=1,2,\cdots,n)$表示$L_i$的长度,

在L_i上任取点$P_i(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)(i=1,2,\cdots,n)$,

构造积分和$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$.若极限

$$\lim_{\max\{\Delta l_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$$

存在,则称该极限为函数f在曲线L上的(第一型)曲线积分,记作$\int_L f dl$.

Note. $\int_L 1dl = length(L)$

•**第一型曲线积分的计算方法**

•**曲线是“一维”的，因此考虑化为定积分**

计算方法：

获得曲线的**参数方程**表示 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$

计算弧长微元 $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$

全部带入，**化为定积分**

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

很多时候曲线的参数方程表示不是现成的.

例(样, 填空): $I=\int_L y\,dl$, 其中L为$y=\sqrt{x}$上从(1,1)到(4,2)的部分

$$\begin{cases} y=\sqrt{t} \\ x=t \end{cases}, t\in[1,4] \qquad dl=\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\,dt$$

解: $I=\int_L y\,dl=\int_1^4 \sqrt{t}\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\,dt=\frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4t+1}\,dt=\frac{1}{2\times 4}\int_1^4 \sqrt{4t+1}\,d(4t)$

$$=\frac{1}{2\times 4}\frac{2}{3}(4t+1)^{3/2}\Big|_1^4=\frac{17^{3/2}-5^{3/2}}{12}$$

例：$I=\oint_L x^2 dl$，其中L为 $x^2+y^2=1$

$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow x=\cos t, y=\sin t, t\in[0,2\pi]$

$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=dt$

解：$I=\oint_L x^2 dl=\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\pi$

例: $I=\oint_L x^2 dl$, 其中L为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解法一: 将$z=-x-y$代入$x^2+y^2+z^2=R^2$, 有

$x^2+xy+y^2=R^2/2$, 即$\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2=\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2$.

$$\text{即} L: \begin{cases} x=\sqrt{2/3}R\cos t, \\ y=\sqrt{1/2}R\sin t-\sqrt{1/6}R\cos t, \\ z=-\sqrt{1/2}R\sin t-\sqrt{1/6}R\cos t, \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi).$$

$$dl=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=Rdt.$$

$$I=\oint_L x^2 dl=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^2\cos^2 t\cdot Rdt=\frac{2}{3}\pi R^3.\square$$

和二重积分，三重积分一样, 计算第一型曲线积分,

有时候也可以利用轮换不变性和对称性简化计算

第一型曲线积分的对称性:

(1)L关于YOZ平面对称, 且$f(x,y,z)=-f(-x,y,z)$则$\int_L f(x,y,z)dl=0$

(2)L关于XOY平面对称, 且$f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$则$\int_L f(x,y,z)dl=0$

(3)L关于XOZ平面对称, 且$f(x,y,z)=-f(x,-y,z)$则$\int_L f(x,y,z)dl=0$

第一型曲线积分的轮换不变性:

L有轮换不变性, 则$I=\int_L f(x,y,z)dl=\int_L f(x,z,y)dl$

$=\int_L f(y,x,z)dl=\int_L f(y,z,x)dl=\int_L f(z,x,y)dl=\int_L f(z,y,x)dl$

例: $I=\oint_L x^2 dl$, 其中L为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解法二: 利用轮换不变性.

$$I=\oint_L x^2 dl=\oint_L y^2 dl=\oint_L z^2 dl=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)dl$$

$$=\frac{R^2}{3}\oint_L dl=\frac{2\pi R^3}{3}.\square$$

为什么说：相比于在重积分中,

在曲线和曲面积分中, 对称性会发挥更大的作用

例: $I=\oint_L xydl$, 其中L为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解: 利用轮换不变性. $I=\oint_L xydl=\oint_L yzdl=\oint_L xzdl$

$$\because J=\oint_L x^2dl=\oint_L y^2dl=\oint_L z^2dl=\frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\therefore 6I+3J=\oint_L x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yzdl$$

$$=\oint_L (x+y+z)^2dl$$

$$=\oint_L 0dl=0.$$

$$\therefore 6I+3J=0, I=-\frac{J}{2}=-\frac{\pi R^3}{3}$$

• **第一型曲面积分的计算方法**

• **曲面是“二维”的，因此考虑化为二重积分**

计算方法：

获得曲面的**参数方程**表示 $r(u,v):\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v), u,v\in D \\ z=z(u,v) \end{cases}$

计算曲面微元 $dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$ $\qquad dS=\|r_u'\times r_v'\|dudv$

全部带入，**化为定积分**

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

$$A=\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\bigg|_{(u_i,v_j)},\quad B=\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\bigg|_{(u_i,v_j)},\quad C=\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\bigg|_{(u_i,v_j)}.$$

$$\iint_S g(x,y,z)dS$$

$$=\iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dxdy. D\text{为}S\text{在}xOy\text{上的投影}$$

•类似于第一型曲线积分，第一型曲面积分也有对称性

例. 计算如下曲面积分$\int_S x^2 \mathrm{d}S$, S是$x^2+y^2+z^2=a^2, a>0$.

$$\int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}dr^2=\frac{4}{3}a^3$$

解. 麻烦之处:球面是隐式给出的, 需要先获取其参数方程表示

•可以采取球坐标换元,但是恐怕计算不会太轻松.

•上半球面$S_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ •下半球面$S_2: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

•$S=S_1\cup S_2, \therefore \int_S x^2 \mathrm{d}S=\int_{S_1} x^2 \mathrm{d}S+\int_{S_2} x^2 \mathrm{d}S$

$$\therefore 先计算\int_{S_1} x^2 \mathrm{d}S=\iint_{D_1} x^2 \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\therefore dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\cos^2\theta \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta$$

参数范围: $D_1: x^2+y^2\le a^2$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^a r^2\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr=\frac{\pi}{2}\int_0^a r^2\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}dr^2=\frac{\pi}{2}a\int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}dr^2=\frac{4}{3}a^3\frac{\pi}{2}a=\frac{2}{3}\pi a^4$$

$$\because \int_{S_2} x^2 \mathrm{d}S=\int_{S_1} x^2 \mathrm{d}S, \therefore \int_S x^2 \mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi a^4$$

例(样题, 填空)

若曲面S的方程为$x^2+y^2+z^2=1$, 计算$\iint_S \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}dS$

解: $\iint_S \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}dS = \iint_S x+y+zdS$

这里也直接带了值.

$$= \iint_S xdS + \iint_S ydS + \iint_S zdS = 0$$

•类似于第一型曲线积分，第一型曲面积分也有对称性

例. $S: x^2+y^2+z^2=1$

求(1) $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$;(2) $\iint_S (x+y+|z|)\mathrm{d}S$;(3) $\iint_S (xz+yz+z^2)\mathrm{d}S$.

解: (1) $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S = \iint_S x\mathrm{d}S + \iint_S y\mathrm{d}S + \iint_S z\mathrm{d}S = 0$

$$(2)\iint_S (x+y+|z|)\mathrm{d}S = \iint_S |z|dS = 2\iint_{S+} zdS, S+:\{z\geq 0\}\cap S$$

$$\because z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \therefore z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, z'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad \therefore dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\text{原式} = 2\iint_{S+}\sqrt{1-x^2-y^2}dS = 2\iint_D dxdy = 2\pi$$

• **类似于第一型曲线积分，第一型曲面积分也有对称性**

例. $S: x^2+y^2+z^2=1$

求 (1) $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$; (2) $\iint_S (x+y+|z|)\mathrm{d}S$; (3) $\iint_S (xz+yz+z^2)\mathrm{d}S$.

解: $(3)\iint_S (xz+yz+z^2)\mathrm{d}S = \iint_S xz\mathrm{d}S + \iint_S yz\mathrm{d}S + \iint_S z^2\mathrm{d}S$

$$= \iint_S z^2\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint_S x^2+y^2+z^2\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint_S 1dS = \frac{4\pi}{3}$$

3/ 第二型曲线/曲面积分

- 第二型曲线积分（曲面积分）的定义
  - 主要运用其和第一型曲线（曲面）积分的关系来计算

$$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,dl.(*)$$

有时候也把$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}$写成$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$

其中$\vec{\tau}$为曲线的单位切向量.

(第二型曲线积分有方向问题, 需要指出曲线的方向!)

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl=\int_L \frac{\left[Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right]}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}dl$$

$$=\int_\alpha^\beta \frac{\left[Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right]}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$$

$$=\int_\alpha^\beta Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)dt\left(**\right)$$

(注意:参数从α向β变化时,对应着曲线上的一个点在移动,
要求这个点移动的方向和事先指定的曲线方向同向)

1 / 曲线积分-第二类曲线积分

例.(2020) $\int_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz,$

其中L是$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2ax \\ x^2+y^2=2x \end{cases}(z\ge 0, a>1)$，方向：从$z$轴正半轴看去是逆时针

1).先求$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2ax \\ x^2+y^2=2x \end{cases}(z\ge 0, a>1)$参数方程 $\because (x-1)^2+y^2=1$，即$\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, 0\le t\le 2\pi$

又$\because x^2+y^2+z^2=2ax, \therefore z^2=(2a-2)x=(2a-2)(1+\cos t)$ $\therefore z=\sqrt{(2a-2)(1+\cos t)}$

$\therefore$参数方程为$\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \\ z=\sqrt{(2a-2)(1+\cos t)} \end{cases}, 0\le t\le 2\pi$ $\quad\therefore \begin{cases} dx=-\sin t dt \\ dy=\cos t dt \\ dz=\sqrt{2a-2}\dfrac{-\sin t dt}{2\sqrt{1+\cos t}} \end{cases}, 0\le t\le 2\pi$

$$\int_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz = \int_L (2ax-x^2)dx+(x^2+2ax-2x)dy+2xdz$$

$$=\int_0^{2\pi}(2a(1+\cos t)-(1+\cos t)^2)d(1+\cos t)+\int_0^{2\pi}((1+\cos t)^2+(2a-2)(1+\cos t))\cos tdt+$$

$$\int_0^{2\pi}2(1+\cos t)d\sqrt{(2a-2)(1+\cos t)}$$

$$=0+\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+(2a-1)+2a\cos t)\cos tdt+\int_0^{2\pi}2(1+\cos t)d\sqrt{(2a-2)(1+\cos t)}$$

$$=0+\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+(2a-1)+2a\cos t)\cos tdt+0$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt \quad =a\int_0^{2\pi}1+\cos 2tdt \quad =2\pi a$$

$$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2ax \\ x^2+y^2=2x \end{cases}(z\ge 0, a>1)$$

$$\Rightarrow z^2=2ax-2x, y^2+z^2=2ax-x^2$$

$$dx=-\sin tdt$$

$$dy=\cos tdt$$

$$dz=\sqrt{2a-2}\,\frac{-\sin tdt}{2\sqrt{1+\cos t}}$$

$$x=1+\cos t$$

$$y=\sin t$$

$$z=\sqrt{(2a-2)(1+\cos t)}$$

•第二型曲面积分的定义

Def. $\vec{n}(x,y,z)$为S的正单位法向量

$$\iint_S P dy\wedge dz + Q dz\wedge dx + R dx\wedge dy = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_S \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)dS$$

Note. 第二型曲面积分也有方向问题

例:$I=\iint_S (2x+z)dy\wedge dz+zdx\wedge dy$,其中$S$为有向曲面

$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$,其法向量与z正半轴夹角为锐角.

解: $\vec{v}=(2x+z,0,z)$, $\vec{n}=(-2x,-2y,+1)/\sqrt{1+4x^2+4y^2}$,

$$dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy,\quad I=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS=\iint_S \frac{-4x^2-2xz+z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[-4x^2-(2x-1)(x^2+y^2)\right]dxdy.$$

由对称性知$\iint_{x^2+y^2\le 1}x(x^2+y^2)dxdy=0$,于是

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(y^2-3x^2)dxdy=\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi} r^2(\sin^2 t-3\cos^2 t)dt$$

$$=\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[1-2(1+\cos 2t)\right]dt=-\pi/2.\square$$

4 / Green公式, Gauss公式, Stokes公式

- **考试的重点!**

Thm. (*Green*公式) 设$D\subset R^2$为有界区域,其边界∂D是逐段光滑的有向曲线.设$P(x,y),Q(x,y)$在D内连续可微,在闭区域$\bar{D}=D\cup\partial D$上连续,则

$$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Remark: *Green*公式中∂D为有向曲线,沿∂D的正向前进时, 区域D总在左侧.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow \text{任意闭曲线上积分与路径无关}$$

Thm. (*Gauss*公式)设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$为有界区域,向量场 $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$在$\Omega$内连续可微,在闭区域$\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$上连续,则

$$\iint_{\partial\Omega} P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Remark:其中$\partial\Omega$外侧为正.

Thm.(*Stokes*公式)设向量场 $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$在空间区域Ω内连续可微, S是Ω内逐片光滑的有向曲面, ∂S逐段光滑,则

$$\oint_{\partial S} Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_S (R'_y-Q'_z)dy\wedge dz+(P'_z-R'_x)dz\wedge dx+(Q'_x-P'_y)dx\wedge dy$$

$$=\iint_S \det\begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} dS$$

Remark: *Stokes*公式中∂S为有向曲线,其方向由有向曲面S诱导:
站在S的正侧,沿∂S的正向前进时, S总在在左手侧.

•以上三个公式的共性

• （闭合）边界上函数的积分等于边界所围成的区域内部上另一函数（是前一个函数的某种“微分”）的积分

•格林公式的几种场景

（1）闭合曲线上的曲线积分-直接转化为二重积分

（2）非闭合曲线的复杂路径上的积分：

•补充一条简单路径，形成闭合区域，转化为二重积分和简单路径上的曲线积分；

（3）区域内部存在不可导点：挖洞法

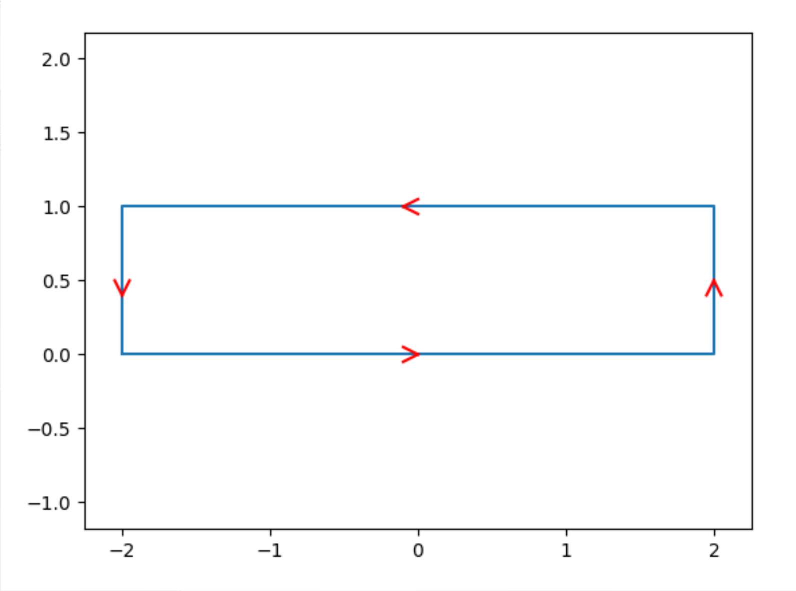
（4）积分与路径无关，求解dz=Pdx+Qdy的问题

（1）闭合曲线上的曲线积分–直接转化为二重积分

例(1)计算$\int_{\partial D} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx+\sin 2xydy), D:\{(x,y):-R\le x\le R, 0\le y\le b\}$,逆时针

(2)求证:$\lim_{R\to\infty}\int_0^b \exp(y^2-R^2)\sin 2Rydy=0$

(3)计算$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\cos 2bxdx$



解(1)0($Q'_x-P'_y=0$)

(2)$|\int_0^b \exp(y^2-R^2)\sin 2Rydy|\le \exp(-R^2)\int_0^b \exp(y^2)dy\to 0$

(3)计算$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\cos 2bxdx$

$$0=\int_{-R}^{R} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx+\sin 2xydy)=\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx+\int_0^b e^{-(R^2-y^2)}\sin 2Rydy+\int_R^{-R} e^{-(x^2-b^2)}\cos 2xbdx+\int_b^0 e^{-(R^2-y^2)}\sin -2Rydy$$

$$=\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx+2\int_0^b e^{-(R^2-y^2)}\sin 2Rydy-\int_{-R}^{R} e^{-(x^2-b^2)}\cos 2xbdx$$

令$R\to+\infty\quad 0=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2-b^2)}\cos 2xbdx\qquad \therefore\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2xbdx$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2xbdx=e^{-b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=e^{-b^2}\sqrt{\pi}$$

例. $f(x,y)$在G内一阶连续可微. 在G的边界上$f=0, G: x^2+y^2\le 1$

评:构造法

求证:

$$\left|\iint_G f\,dxdy\right| \le \frac{\pi}{3}a^3\max_G(\|gradf\|_2),\text{其中}\|gradf\|_2=\sqrt{f'^2_x+f'^2_y}$$

分析. $0=\oint_{x^2+y^2=1} -f(x,y)ydx+f(x,y)xdy = \iint_G 2f+f'_x x+f'_y y=0$

$$\therefore \left|\iint_G f\,dxdy\right| = \frac{1}{2}\left|\iint_G f'_x x+f'_y y\,dxdy\right| \le \frac{1}{2}\left|\iint_G \sqrt{f'^2_x+f'^2_y}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\right|$$

$$\left|\frac{1}{2}\iint_G \sqrt{f'^2_x+f'^2_y}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\right| \le \frac{1}{2}\max_G\|gradf\|_2\iint_G\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\max_G\|gradf\|_2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2 d\rho=\frac{\pi}{3}\max_G\|gradf\|_2$$

•格林公式的几种场景

- （2）非闭合曲线的复杂路径上的积分：

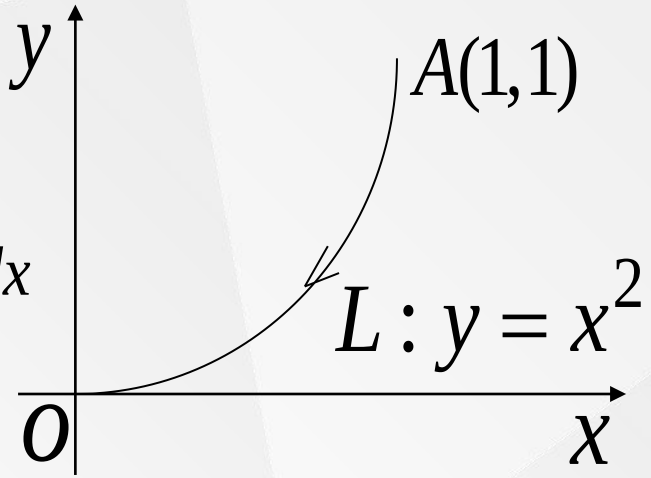
•补充一条简单路径，形成闭合区域，转化为二重积分和简单路径上的曲线积分；

例$I=\int_L Pdx+Qdy.P=xe^{-(x^2-y^2)}(1-x^2-y^2)-y,Q=ye^{-(x^2-y^2)}(1+x^2+y^2)+x$

其中L为$y=x^2$上从$A(1,1)$到$O(0,0)$的一段.

如果按照常规思路:y按x^2带入

则$I=\int_1^0 xe^{-(x^2-x^4)}(1-x^2-x^4)-x^2+(x^2e^{-(x^2-x^4)}(1+x^2+x^4)+x)2xdx$



这个定积分算不出来！！

•格林公式的几种场景

• （2）非闭合曲线的复杂路径上的积分：

•补充一条简单路径，形成闭合区域，转化为二重积分和简单路径上的曲线积分；

例$I=\int_L Pdx+Qdy.P=xe^{-(x^2-y^2)}(1-x^2-y^2)-y,Q=ye^{-(x^2-y^2)}(1+x^2+y^2)+x$

其中L为$y=x^2$上从$A(1,1)$到$O(0,0)$的一段.

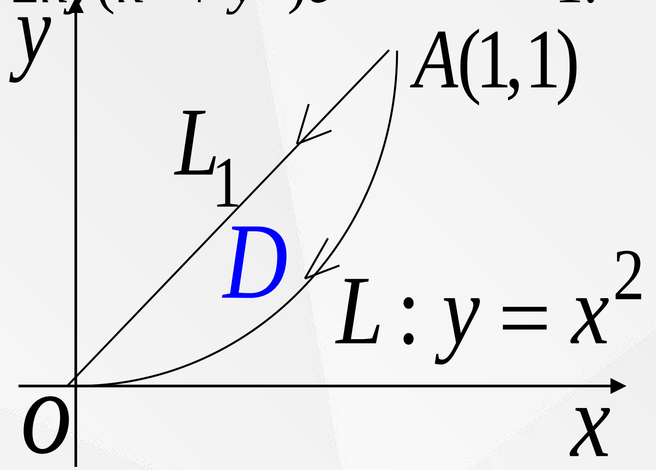
$Q'_x=-2xy(x^2+y^2)e^{-(x^2-y^2)}+1.$

$P'_y=-2xy(x^2+y^2)e^{-(x^2-y^2)}-1.$

格林公式的难处:不是闭合曲线 那就让他闭合

$$\int_{L_1\cup L^-} Pdx+Qdy=\iint_D Q'_x-P'_y dxdy=\iint_D 2dxdy=2S(D)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_L Pdx+Qdy=\int_{L_1} Pdx+Qdy-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$$



而$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_1^0 x(1-2x^2)-x+x(1+2x^2)+xdx=\int_1^0 2xdx=-1$

- （3）区域内部存在不可导点：挖洞

•一般来说，挖一个半径为r的小孔，被挖掉之后，一般来说积分为0，小圆周边界上的积分利用其他方式算（可能引入极限过程）；

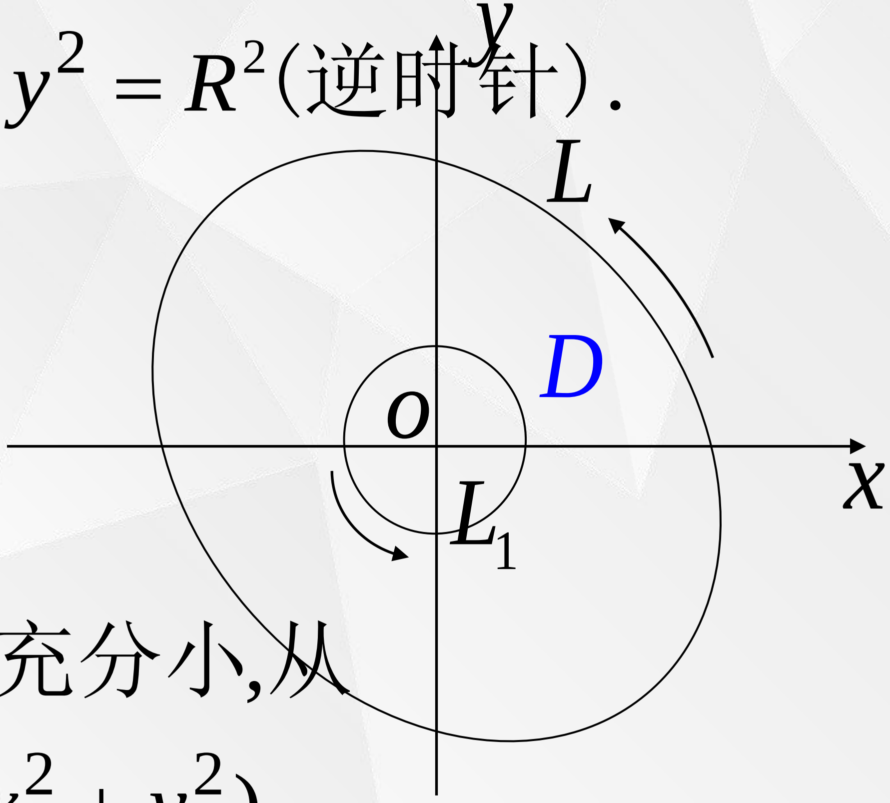
例: $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, L为(1)$x^2+y^2=R^2$;(2)$x^2+xy+y^2=R^2$(逆时针).

解: (1)$x^2+y^2=R^2$: $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_L \frac{xdy-ydx}{R^2}$(直接带入消去了不可导点)

$$=\frac{1}{R^2}\oint_L xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{R^2}\iint_{x^2+y^2\le R^2} 2dxdy=2\pi$$

例:$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,$L$为椭圆周 $x^2+xy+y^2=R^2$(逆时针).



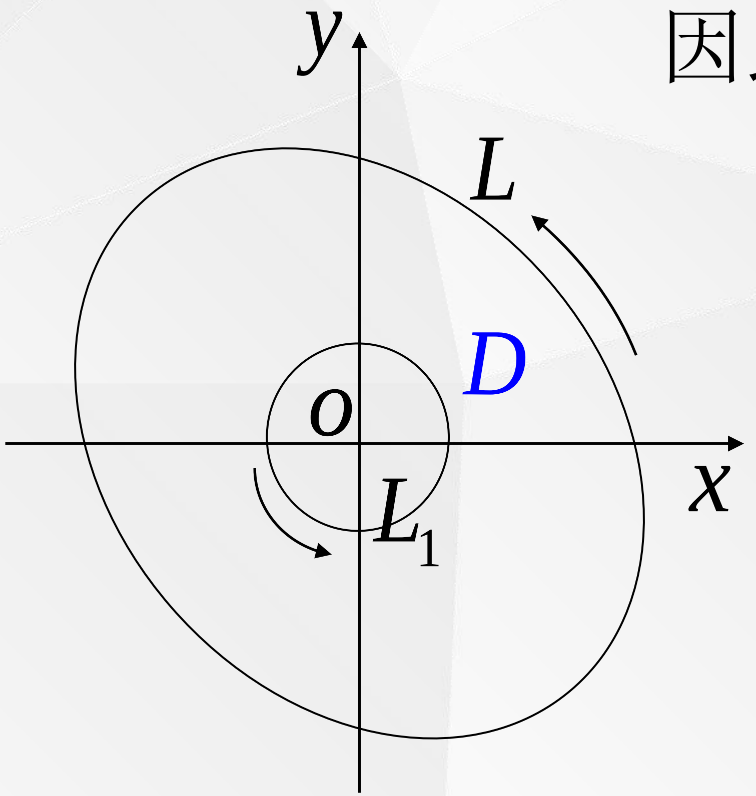
分析:因为P,Q在原点无定义,不能直接在椭圆$x^2+xy+y^2=R^2$上用Green公式.

解:设L_1为逆时针方向圆周$x^2+y^2=r^2$,r充分小,从而L_1在L内部. $P=-y/(x^2+y^2)$,$Q=x/(x^2+y^2)$,

在L与L_1围成的环形区域D上$Q'_x-P'_y\equiv 0$.

由Green公式,

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D 0dxdy=0.$$



因此, $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

$$=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{r^2}$$

$=2\pi.$ (根据第一问)

- （3）区域内部存在不可导点：挖洞

•一般来说，挖一个半径为r的小孔，被挖掉之后，一般来说积分为0，小圆周边界上的积分利用其他方式算（可能引入极限过程）；

例:$I=\oint_L Pdx+Qdy, P=\dfrac{e^x}{x^2+y^2}(x\sin y-y\cos y), Q=\dfrac{e^x}{x^2+y^2}(x\cos y+y\sin y),$

L为$\{(x,y):x^2+y^2=1\}.$ $\qquad D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$

解:$I=\oint_L Pdx+Qdy=\oint_L e^x(x\sin y-y\cos y)dx+e^x(x\cos y+y\sin y)dy \overset{Green公式}{=} \iint_D 2e^x\cos y\,dxdy,$

通过计算得到,$P'_y=Q'_x$ $\therefore \forall r>0,$ $I=\oint_L Pdx+Qdy=\oint_{x^2+y^2=r^2} Pdx+Qdy$ 积不出！

$$=\oint_{x^2+y^2=r^2}\frac{e^x}{x^2+y^2}((x\sin y-y\cos y)dx+\frac{e^x}{x^2+y^2}(x\cos y+y\sin y)dy$$

$$=\frac{1}{r^2}\oint_{x^2+y^2=r^2}e^x(x\sin y-y\cos y)dx+e^x(x\cos y+y\sin y)dy=\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2}2e^x\cos y\,dxdy\ ,\forall r>0$$

$$\therefore I=\lim_{r\to 0+}\oint_{L_r}Pdx+Qdy=\lim_{r\to 0+}\frac{1}{r^2}\iint_D 2e^x\cos y\,dxdy=\lim_{r\to 0+}\frac{1}{r^2}\pi r^2\bullet 2e^{\xi}\cos\eta$$

$$=\lim_{r\to 0+}2\pi e^{\xi}\cos\eta=2\pi,(\xi,\eta)\in D$$

（4）综合例题

例. $u(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2), u''_{xx}+u''_{yy}=0$, 则 $\forall x_0, y_0\in\mathbb{R}, \forall r>0, u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi r}\oint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2} u(x,y)dl$

解. $$L(r):=\frac{1}{2\pi r}\oint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2} u(x,y)dl \;=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)d\theta$$

$$\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases}, \theta\in[0,2\pi]$$

$$L'(r)\;=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta u'_x(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)+\sin\theta u'_y(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'_x(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)d\left(\sin\theta\right)-u'_y(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)d\left(\cos\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{x^2+y^2=1} u'_x(x_0+rx, y_0+ry)dy-u'_y(x_0+rx, y_0+ry)dx$$

$$\begin{cases} x=x_0+\cos\theta \\ y=y_0+\sin\theta \end{cases}, \theta\in[0,2\pi]\Leftrightarrow\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} ru'_{xx}(x_0+rx, y_0+ry)+ru'_{yy}(x_0+rx, y_0+ry)dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} r\left(u'_{xx}(x_0+rx, y_0+ry)+u'_{yy}(x_0+rx, y_0+ry)\right)dxdy$$

$$=0$$

$$L(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0,y_0)d\theta=u(x_0,y_0)$$

恰当方程与全微分:

Def.称具有对称形式的一阶微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (*)$$

为恰当方程, 若方程左端是某个二元函数$u(x,y)$的全微分

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy\equiv du(x,y).$$

容易验证恰当方程(*)的解为$u(x,y)=c$.

Question1.如何判断(*)是否恰当方程? $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

Question2.如何求恰当方程的解?

一般方法:积分与路径无关, 偏积分法

例.(2020) $D=\{(x,y):x>0\}$

(1) $A,B\in D$, L为任意一条连接AB的逐段光滑的曲线, 问$\int_L \frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}$是否与路径无关;

(2)在D上,是否存在二元函数$z=z(x,y)$,满足$dz=\frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}$

解 (1) 由题意$P=\frac{y}{x^2+2y^2}, Q=-\frac{x}{x^2+2y^2}$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-2y^2}{(x^2+2y^2)}$$

$\because D$单连通, $\therefore$积分与路径无关

例.(2020) $D=\{(x,y):x>0\}$

(1) $A,B\in D$, L为任意一条连接AB的逐段光滑的曲线, 问$\int_L \dfrac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}$是否与路径无关;

(2)在D上, 是否存在二元函数$z=z(x,y)$, 满足$dz=\dfrac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}$

解 (2) 由题意 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+2y^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+2y^2}$ $\because \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+2y^2}, \therefore z=\int\dfrac{y}{x^2+2y^2}dx+g(y)$

$$=\frac{y}{2y^2}\int\frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}y})^2+1}dx+g(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}y})^2+1}d\frac{x}{\sqrt{2}y}+g(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}y}+g(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\frac{x^2}{2y^2}+1}\frac{x}{\sqrt{2}y^2}+g'(y)=-\frac{x}{x^2+2y^2}+g'(y)\quad \therefore g'(y)=0\quad \therefore z=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}y}+C\text{为所求}$$

为保证z的连续性, $z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\sqrt{2}y}{x}+C$为所求

•格林公式的几种场景

（1）闭合曲线上的曲线积分-化二重积分

（2）非闭合曲线的复杂路径上的积分：

•补充一条简单路径，

•形成闭合区域，转化；

（3）区域内部存在不可导点：挖洞法（挖小圆+极限过程）

（4）积分与路径无关，求解dz=Pdx+Qdy的问题

方向：左手定则

•高斯公式的几种场景

（1）闭合曲面上的曲面积分-化三重积分

（2）非闭合曲面的复杂曲面上的积分：

•补充一个简单曲面，

•形成闭合区域，转化为简单曲面的积分与三重积分；

（3）区域内部存在不可导点：挖洞法（挖小球+极限过程）

方向：外

Thm. ($Gauss$公式)设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$为有界区域,向量场

$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$在$\Omega$内连续可微,在闭区域$\bar{\Omega}=$

$\Omega\cup\partial\Omega$上连续,则

$$\iint_{\partial\Omega}Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Remark:其中$\partial\Omega$外侧为正.

记:$F=(P,Q,R)$,左边$=\iint_{\partial\Omega}F\bullet dS$ 定义算子$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\nabla\bullet F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ $\therefore$ 左边$=\iint_{\partial\Omega}F\bullet dS=\iiint_{\Omega}\nabla\bullet Fdxdydz$

例. 计算$I=\iint_S a^2b^2z^2x\,dy\wedge dz+b^2c^2x^2y\,dz\wedge dx+c^2a^2y^2z\,dx\wedge dy$,

$S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, z\geq 0, a,b,c>0$, 方向向下

解: 如果用定义, 计算法向量$\left(2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2\right)$, 单位化

$$\frac{1}{\sqrt{\left(2x/a^2\right)^2+\left(2y/b^2\right)^2+\left(2z/c^2\right)^2}}\left(2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2\right)$$

不推荐此法

例. 计算$I=\iint_S a^2b^2z^2xdy\wedge dz+b^2c^2x^2ydz\wedge dx+c^2a^2y^2zdx\wedge dy$,

$S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, z\ge 0, a,b,c>0$, 方向向下

解:高斯公式,补充曲面 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1, z=0$, 方向向上

$$J=\iint_D a^2b^2z^2xdy\wedge dz+b^2c^2x^2ydz\wedge dx+c^2a^2y^2zdx\wedge dy=\iint_D c^2a^2y^2zdS$$

$$=\iint_D 0dS=0$$

$$I+J=\iint_{S\cup D} a^2b^2z^2xdy\wedge dz+b^2c^2x^2ydz\wedge dx+c^2a^2y^2zdx\wedge dy$$

$$=-\iiint_V a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+c^2a^2y^2dv \quad =-a^2b^2c^2\iiint_V \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}dv$$

$$V:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1, z\ge 0 \quad =-a^2b^2c^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r^2\left(abcr^2\sin\varphi\right)dr$$

$$=-a^3b^3c^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=-\frac{2\pi a^3b^3c^3}{5} \quad \therefore I=-\frac{2\pi a^3b^3c^3}{5}$$

例:(2020期末)

Ω为包含原点的有界开区域,其边界$\partial\Omega$为C^1光滑正则曲面.

$$r=(x,y,z),\|r\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad \Omega_\varepsilon=\{(x,y,z)\in\Omega\mid x^2+y^2+z^2\geq\varepsilon^2\}$$

求证:$\dfrac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}\cos(r,n)dS=\lim_{\varepsilon\to0+}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\dfrac{1}{\|r\|}dxdydz$　n为指向外侧$\partial\Omega$单位法向量

证. $\because\cos(r,n)=\dfrac{r\bullet n}{\|r\|}$　$\therefore\dfrac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}\cos(r,n)dS=\dfrac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}\dfrac{r\bullet n}{\|r\|}dS$

$$=\frac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}\frac{x}{\|r\|}dydz+\frac{y}{\|r\|}dzdx+\frac{z}{\|r\|}dxdy=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\frac{2}{\|r\|}dxdydz?\ ?$$

$$\because P=\frac{x}{\|r\|},Q=\frac{y}{\|r\|},R=\frac{z}{\|r\|},\therefore P_x'=\frac{\|r\|^2-x^2}{\|r\|^3},Q_y{}'=\frac{\|r\|^2-y^2}{\|r\|^3},R_z{}'=\frac{\|r\|^2-z^2}{\|r\|^3}$$

$\therefore P_x'+Q_y{}'+R_z{}'=2/\|r\|$,　由于$\Omega$中含有不可导点,不可以直接用高斯公式!

例:(2020期末)

Ω为包含原点的有界开区域,其边界$\partial\Omega$为C^1光滑正则曲面.

$r=(x,y,z),\|r\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$　　$\Omega_\varepsilon=\{(x,y,z)\in\Omega\mid x^2+y^2+z^2\geq\varepsilon^2\}$

求证:$\frac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}\cos(r,n)dS=\lim_{\varepsilon\to 0+}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{\|r\|}dxdydz$　　n为指向外侧$\partial\Omega$单位法向量

证.　左边 $=\frac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}\frac{x}{\|r\|}dydz+\frac{y}{\|r\|}dzdx+\frac{z}{\|r\|}dxdy$

$\because P_x'+Q_y'+R_z'=2/\|r\|$　　$S_\varepsilon=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\}$

$$\text{左边}=\frac{1}{2}\iint_{\partial\Omega\cup S_\varepsilon^-}\frac{x}{\|r\|}dydz+\frac{y}{\|r\|}dzdx+\frac{z}{\|r\|}dxdy+\frac{1}{2}\iint_{S_\varepsilon}\frac{x}{\|r\|}dydz+\frac{y}{\|r\|}dzdx+\frac{z}{\|r\|}dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{\|r\|}dxdydz+\frac{1}{2}\iint_{S_\varepsilon}\frac{x}{\|r\|}dydz+\frac{y}{\|r\|}dzdx+\frac{z}{\|r\|}dxdy$$

例:(2020期末)

Ω为包含原点的有界开区域,其边界$\partial\Omega$为C^1光滑正则曲面.

$$r=(x,y,z),\|r\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad \Omega_\varepsilon=\{(x,y,z)\in\Omega\mid x^2+y^2+z^2\ge\varepsilon^2\}$$

求证:$\frac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}\cos(r,n)dS=\lim_{\varepsilon\to0+}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{\|r\|}dxdydz$　n为指向外侧$\partial\Omega$单位法向量

$$\text{左边}=\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{\|r\|}dxdydz+\frac{1}{2}\iint_{S_\varepsilon}\frac{x}{\|r\|}dydz+\frac{y}{\|r\|}dzdx+\frac{z}{\|r\|}dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{\|r\|}dxdydz+\frac{1}{2}\iint_{S_\varepsilon}\frac{x}{\varepsilon}dydz+\frac{y}{\varepsilon}dzdx+\frac{z}{\varepsilon}dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{\|r\|}dxdydz+\frac{1}{2\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{\|r\|}dxdydz+\frac{1}{2\varepsilon}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le\varepsilon^2}3dxdydz=\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{\|r\|}dxdydz+2\pi\varepsilon^2$$

令$\varepsilon\to0+$,左边$=\lim_{\varepsilon\to0+}\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{\|r\|}dxdydz$

例:$u(x,y,z)\in C^3(\mathbb{R}^3), u(x,y,z)\equiv 0, \forall (x,y,z)\in\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}$.

$u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=0, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

求证:$u\equiv 0, \forall x,y,z\in\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\}$

分析:目标:往证$u'_x=u'_y=u'_z=0 \Leftrightarrow \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z dxdydz=0$

有函数的边界信息:联系球面和球体两种积分的工具是$Gauss$公式

$$0=\oiint_{x^2+y^2+z^2=1} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z dxdydz$$

$P?Q?R?$ $\quad P=u\bullet u'_x, Q=u\bullet u'_y, R=u\bullet u'_z$ $\quad div(P,Q,R)=u\left(u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}\right)+\left(u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z\right)$

$P=0, Q=0, R=0, \forall\left(x,y,z\right), x^2+y^2+z^2=1$ $\quad =\left(u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z\right)$

Thm.(*Stokes*公式)设向量场 $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$在空间区域Ω内连续可微, S是Ω内逐片光滑的有向曲面, ∂S逐段光滑,则

$$\oint_{\partial S} Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_S (R_y'-Q_z')dy\wedge dz+(P_z'-R_x')dz\wedge dx+(Q_x'-P_y')dx\wedge dy$$

记: $F=(P,Q,R)$, 左边 $=\oint_{\partial S} F\bullet \mathrm{dl}$ 定义算子 $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left(R_y'-Q_z',P_z'-R_x',Q_x'-P_y'\right)$$

$$\therefore \oint_{\partial S} F\bullet dl=\iint_S (\nabla\times F)\bullet dS$$

$Stokes$公式是对$Green$公式的另一种推广，可以简化曲线积分的计算

但是，很可怕的一件事是，斯托克斯公式转化曲线积分为曲面积分，往往还是不好算

Remark: $Stokes$公式中∂S为有向曲线，其方向由有向曲面S诱导：站在S的正侧，沿∂S的正向前进时，S总在在左手侧.

例(2020) $\int_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz,$

其中L是$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2ax \\ x^2+y^2=2x \end{cases}(z\geq 0, a>1)$，方向：从$z$轴正半轴看去是逆时针

例(2020) $\int_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz,$

其中L是$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2ax \\ x^2+y^2=2x \end{cases}(z\geq 0, a>1)$,方向:从$z$轴正半轴看去是逆时针

解(斯托克斯公式)

$$\int_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz = \iint_S (2y-2z)dydz-(2x-2z)dzdx+(2x-2y)dxdy$$

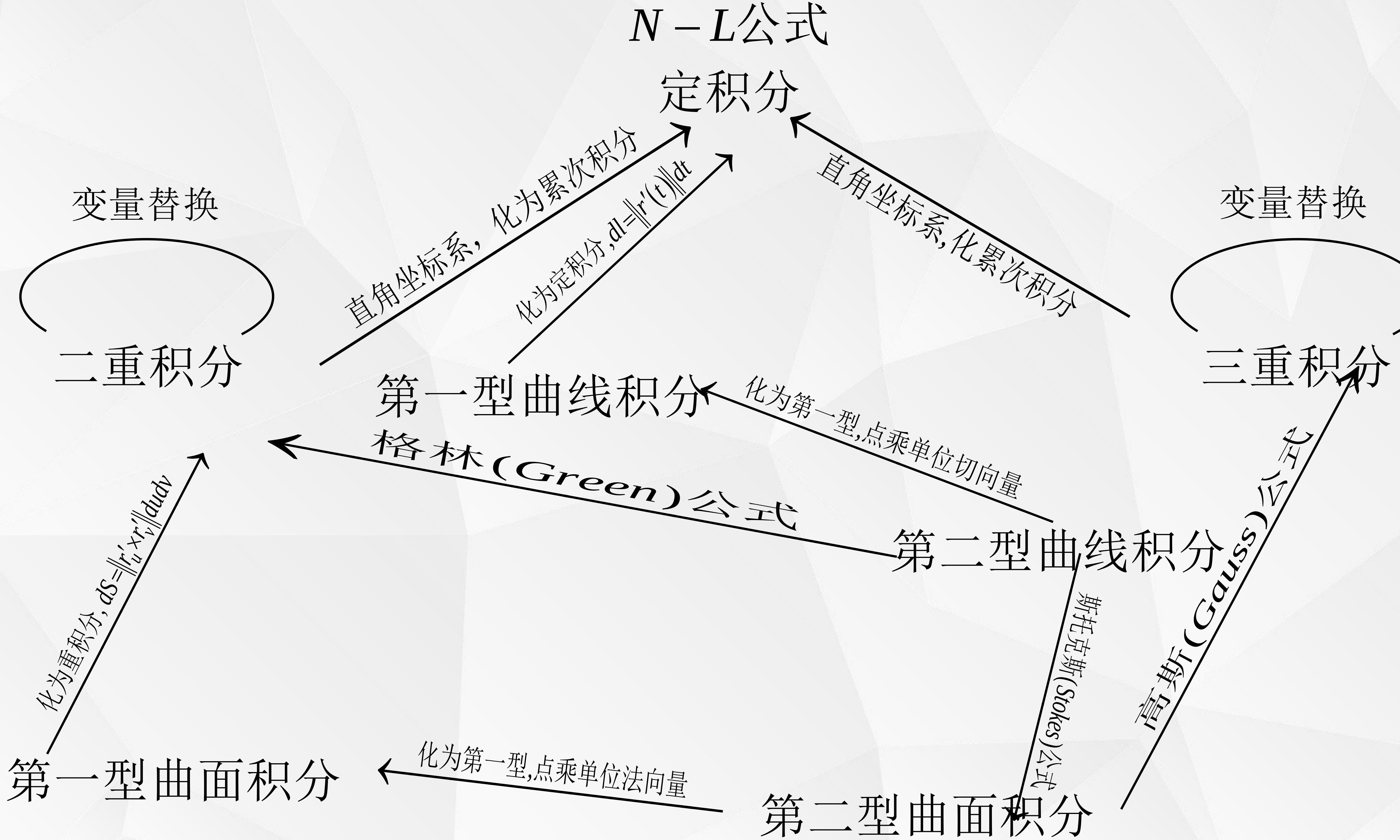
单位法向量方向$\frac{1}{a}(x-a,y,z)$ $\quad = \frac{1}{a}\iint_S (2y-2z)(x-a)-(2x-2z)y+(2x-2y)zdS$

$$=\iint_S (2z-2y)dS \quad = 2\iint_{\{x^2+y^2\leq 2x\}}(z-y)\frac{a}{z}dxdy$$

S是$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2ax \\ x^2+y^2\leq 2x \end{cases}(z\geq 0, a>1$

$$=2\iint_{\{x^2+y^2\leq 2x\}} a-\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2-y^2}}ydxdy = 2\iint_{\{x^2+y^2\leq 2x\}} adxdy \quad = 2\pi a$$

$$x+zz_x'=a, y+zz_y'=0, \therefore dS=\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}=\sqrt{(\frac{a-x}{z})^2+(\frac{y}{z})^2+1}=\frac{a}{z}$$


$N-L$公式
定积分
变量替换
二重积分
直角坐标系，化为累次积分
化为定积分,$dl=\|r'(t)\|dt$
直角坐标系,化累次积分
变量替换
三重积分
第一型曲线积分
化为第一型,点乘单位切向量
格林(Green)公式
第二型曲线积分
化为重积分, $dS=\|r'_u\times r'_v\|dudv$
斯托克斯(Stokes)公式
高斯(Gauss)公式
第一型曲面积分
化为第一型,点乘单位法向量
第二型曲面积分

目 录

contents

常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} S_n \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

常数项级数的敛散性判定

1.检查$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$是否成立

2.如果$a_n \geq 0$,

比较判别法

$a_n \leq Cb_n, \sum b_n$敛,则$\sum a_n$敛

$a_n \geq Cb_n, \sum b_n$散,则$\sum a_n$散

比较判别法

的极限形式（*）

$$\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = C, \begin{cases} C > 0, \text{同敛散} \\ C = 0, \sum b_n \text{收敛} \Rightarrow \sum a_n \text{收敛} \\ C = +\infty, \sum b_n \text{发散} \Rightarrow \sum a_n \text{发散} \end{cases}$$

常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} S_n \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

常数项级数的敛散性判定

1.检查$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$是否成立

2.如果$a_n \geq 0$,

- 比值(率)判别法 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = C, \begin{cases} C > 1, \text{发散} \\ C < 1, \text{收敛} \end{cases}$
- 根值判别法 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C, \begin{cases} C > 1, \text{发散} \\ C < 1, \text{收敛} \end{cases}$
- 积分判别法
- 拉比判别法、高斯判别法

例. $\left(P261-3(1)\right)$ 比较判别法

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}},\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}},$$

解: $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\dfrac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}$ $\quad(\ln\ln n)^2\le\ln n$, 当$n$充分大时

$\therefore\dfrac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}\ge\dfrac{1}{e^{\ln n}}=\dfrac{1}{n}\quad\therefore\sum\dfrac{1}{n}$发散 $\Rightarrow\sum\dfrac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}=\sum\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$发散

$\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}=\dfrac{1}{e^{\ln\ln\ln n\cdot\ln n}}\le\dfrac{1}{e^{2\cdot\ln n}}$, n充分大时

$=\dfrac{1}{n^2}\quad\therefore\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛 $\Rightarrow\sum\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$收敛

例. $\left(P246-9(2)\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)?$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = C,\begin{cases} C>0,\text{同敛散} \\ C=0,\sum b_n\text{收敛}\Rightarrow\sum a_n\text{收敛} \\ C=+\infty,\sum b_n\text{发散}\Rightarrow\sum a_n\text{发散} \end{cases}$$

解. $n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\dfrac{\ln n}{n^2+1}$

$$\sin x\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},e^x-1\sim x$$

$$\ln(1+x)\sim x,(1+x)^a-1\sim ax$$

$\therefore$ 原级数和$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+1}$同敛散

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln n}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n^{1.5}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1.5}\ln n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$$

$\because\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$收敛,$\therefore\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+1}$收敛

例. $\left(P261-3(10)\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n\right)!!}{a(a+1)(a+2)....(a+n)},a>0$$

比值(率)判别法　$n!,2^n,n^n$

$$解:a_n=\frac{\left(2n\right)!!}{a(a+1)(a+2)....(a+n)}$$

$$a_{n+1}/a_n=\frac{\dfrac{\left(2n+2\right)!!}{a(a+1)(a+2)....(a+n+1)}}{\dfrac{\left(2n\right)!!}{a(a+1)(a+2)....(a+n)}}=\frac{\left(2n+2\right)}{(a+n+1)}\to 2$$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散

例. $\left(P245-3(2)\right)$ 根值判别法：形如$a_n=b_n{}^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},a>0$$

解:$a_n=\dfrac{1}{a^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$,$\therefore a_n{}^{1/n}=\dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\to\dfrac{e}{a}$

$\therefore\dfrac{e}{a}<1$,即$a>e$时, 收敛 ,$\dfrac{e}{a}>1$,即$a<e$时, 发散　下面考虑$a=e$的情况

$$\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\frac{e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})}}{e^n}=e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n}=e^{n\left(n\ln(1+\frac{1}{n})-1\right)}=e^{n\left(n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-1\right)}$$

$=e^{\left(n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-n\right)}=e^{\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}\to e^{-1/2}\neq 0$ 检查级数的通项是否趋于0！

常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty} S_n \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

常数项级数的敛散性判定

1.检查$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$是否成立

2.如果$a_n \geq 0$, $\begin{cases} \text{比较判别法} \\ \text{比值(率)判别法} \\ \text{积分判别法} \end{cases}$ 比较判别法的极限形式（*）

根值判别法

拉比判别法、高斯判别法

3.如果a_n变号　先考虑$\sum |a_n|$,若其收敛,称$\sum a_n$绝对收敛

绝对收敛的级数也收敛

存在一类级数,$\sum |a_n|$不收敛,但$\sum a_n$收敛

称为条件收敛

常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

有时，我们把一个级数分解为多个容易判断敛散性的级数进行判敛

Remark. $\sum a_n$发散，$\sum b_n$发散 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$? 未定！

$\sum a_n$条件收敛，$\sum b_n$条件收敛 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$? 收敛！

$\sum a_n$绝对收敛，$\sum b_n$绝对收敛 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$ 绝对收敛;

$\sum a_n$绝对收敛，$\sum b_n$条件收敛 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$ 条件收敛;

$\sum a_n$绝对收敛，$\sum b_n$发散 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$ 发散;

$\sum a_n$条件收敛，$\sum b_n$发散 $\Rightarrow \sum (a_n \pm b_n)$ 发散.

例. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ 条件收敛.

Taylor展开!

Proof. $n\to+\infty$时, $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}$

$$=\frac{(-1)^n}{n}\left[1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\sum\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛, $\sum\frac{1}{n^2}$绝对收敛, $\sum\frac{(-1)^n}{n}o\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛, 故原级数条件收敛.□

例. $a_n=\dfrac{\sin n}{n^p+\sin n}$,讨论$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的收敛性.(要讨论绝对收敛, 条件收敛, 发散)

解. $a_n=\dfrac{\sin n}{n^p+\sin n}$,若$p\le 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$不成立,发散

若$p>1$, $\left|\dfrac{\sin n}{n^p+\sin n}\right|\le\dfrac{1}{\left|n^p+\sin n\right|}\le\dfrac{1}{n^p-\left|\sin n\right|}\le\dfrac{1}{n^p-1}\sim\dfrac{1}{n^p}$ $\therefore$绝对收敛

当$0<p\le 1$时, $a_n=\dfrac{\sin n}{n^p+\sin n}=\dfrac{\frac{\sin n}{n^p}}{1+\frac{\sin n}{n^p}}=\dfrac{\sin n}{n^p}\dfrac{1}{1+\frac{\sin n}{n^p}}$

$$=\frac{\sin n}{n^p}\left(1-\frac{\sin n}{n^p}+o(\frac{\sin n}{n^p})\right)=\frac{\sin n}{n^p}-\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}+o(\frac{\sin^2 n}{n^{2p}})\ \ \ldots$$

$$综上,\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^p+\sin n}\begin{cases}发散, & p\le 1/2;\\ 条件收敛, & 1/2<p\le 1;\\ 绝对收敛, & p>1.\end{cases}$$ □

常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

3.如果a_n变号 $Leibniz$判敛法:$\sum (-1)^n a_n, a_n > 0, a_n \downarrow 0 \Rightarrow$收敛

$Dirichlet$判敛法:$\sum a_n b_n, \sum_{k=1}^{n} a_k$有界$, b_n$单调趋于$0 \Rightarrow$收敛

$Abel$判敛法:$\sum a_n b_n, \sum_{k=1}^{\infty} a_k$收敛$, b_n$单调有界$\Rightarrow$收敛

$Dirichlet$判敛法中的$a_n = \cos kn, (-1)^n, \ldots$

例. $a_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, 讨论$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$的收敛性.(要讨论绝对收敛, 条件收敛, 发散)

(P258−4(10))

解. $a_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin((\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)+n\pi)$

$$=(-1)^n\sin((\sqrt{n^2+1}-n)\pi)\quad=(-1)^n\sin(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n})$$

$$n\geq 1, 0\leq\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\leq\frac{\pi}{2}, \therefore\ \sin(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n})\geq\frac{\pi}{2}, \sin(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n})\downarrow 0$$

$\therefore$收敛, 下面考虑绝对收敛性

$$|a_n|=\sin(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n})\sim\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n}\quad\because\sum\frac{\pi}{2n}\text{发散}, \therefore\sum|a_n|\text{发散}$$

$\therefore$条件收敛

例. $a_n>0,\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$,求证:$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛 (P261−6)

解. 试图运用Leibniz判别法 来证明$a_n\downarrow 0$

先证明a_n单调下降：$\because \lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$,

$\therefore$由极限保序性,$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0,\forall n>N,\exists N>0\ \therefore\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0$,即$a_n>a_{n+1}$

$\therefore a_n$严格单调递减; $\because a_n>0$,根据单调收敛原理,设$\lim_{n\to\infty} a_n=a$

下面证明$a=0$,反设$a>0\ \ \because \lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$,

$\therefore$由极限保序性,$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\lambda/2,\forall n>N,\exists N>0\ \therefore \dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1>\dfrac{\lambda/2}{n}$,即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{\lambda/2}{n},\quad a_n>\left(1+\frac{\lambda/2}{n}\right)a_{n+1}$$

$$\because a_n > \left(1+\frac{\lambda/2}{n}\right)a_{n+1}, \forall n > N, a_n > 0$$

$$\therefore \ln a_n > \ln\left(1+\frac{\lambda/2}{n}\right)+\ln a_{n+1}, \forall n > N \qquad \ln a_{n+1} > \ln\left(1+\frac{\lambda/2}{n+1}\right)+\ln a_{n+2}, \forall n > N$$

$$\Rightarrow \ln a_n > \ln\left(1+\frac{\lambda/2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{\lambda/2}{n+1}\right)+\ln a_{n+2}, \forall n > N$$

$$\therefore \ln a_n > \sum_{k=0}^{m}\ln\left(1+\frac{\lambda/2}{n+k}\right)+\ln a_{n+m+1}, \forall n > N$$

$$\therefore \ln a_n - \ln a_{n+m+1} > \sum_{k=0}^{m}\ln\left(1+\frac{\lambda/2}{n+k}\right), \forall n > N$$ 两边令$m \to \infty, \ln(a_{n+m+1}) \to \ln(a)$

$$\therefore \ln(a_n)-\ln(a) \geq \sum_{k=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda/2}{n+k}\right) \qquad \ln\left(1+\frac{\lambda/2}{n+k}\right) \sim \frac{\lambda/2}{n+k} \sim \frac{\lambda/2}{k}$$

$\therefore$ 右侧趋于正无穷,矛盾!

例. (2020微A期末,10分)

设$a_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$收敛, 记$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(1)证明:$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$+\infty$;

(2)证明:$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx$收敛;

(3)证明:$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$.

证:(1) $\because \forall R>0, \lim_{n\to\infty} \frac{R^n}{n!}=0$ $\quad \therefore \exists N>0, \forall n>N, \frac{R^n}{n!} \leq 1$, 即$R^n \leq n!$

$\therefore \forall n>N, a_n R^n \leq a_n n!$ $\quad \therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$收敛.

....(2分)

例. (2020微A期末,10分) 设$a_n\ge 0,\sum_{n=0}^{\infty}a_n n!$收敛,记$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

(2)证明:$\int_0^{+\infty}f(x)e^{-x}dx$收敛; $\left(提示:\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=n!\right)$.

证明:(2)$\int_0^N f(x)e^{-x}dx=\int_0^N\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n e^{-x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^N x^n e^{-x}dx\le\sum_{n=0}^{\infty}a_n n!$

$\therefore\int_0^N f(x)e^{-x}dx$有上界,又$f(x)e^{-x}\ge 0,\therefore\int_0^{+\infty}f(x)e^{-x}dx$收敛.

....(5分)

可以交换顺序的理论依据:$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n e^{-x}$在$[0,N]$上一致收敛(*Weierstrass*)

例. (2020微A期末,10分) 设$a_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$收敛, 记$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(3)证明:$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$. $\left(\text{提示}: \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!\right)$.

证明:(3) $\because \int_0^N f(x)e^{-x}dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$ $\therefore \int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n n! = \sum_{n=0}^{N} a_n \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n dx \leq \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! \leq \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx$$

综上$\int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$...(10分)