微积分A2第十五讲(期中考试复习题)

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2022年04月11日

一．填空题

1. 设 $f(u)$ 可导，$z = f(\ln x + \frac{1}{y})$，则 $xz_x + y^2 z_y =$ ______.

2. 曲面 $(x + y + z)e^{xyz} = 3e$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面方程为______.

3. 设 $f(x, y) = x^2 \cos y + y(x - 1)\arcsin(\tan x)$，则 $f_x(1, 0) =$ ______.

4. 极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2} =$ ______.

5. 极限 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} =$ ______.

填空题，续一

6. 极限 $\lim_{y\to 0^+}\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+xy)^{1/y}}$ ______.

7. 设 $f(x)$ 可导，$J(y)=\int_0^y (x-y)f(x)dx$，则 $J''(y)=$ ______.

8. 计算累次积分 $J=\int_0^{+\infty}dx\int_1^2 e^{-tx}dt=$ ______.

9. 设 $z=\arccos\frac{x}{y}$，则其微分 $dz=$ ______.

10. 设 $f(x,y)=x^y y^x$，则 f 在点 $(1,1)$ 处的微分为 $df(1,1)=$ ______.

11. 曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ 2x^2y+2y-z^2=0, \end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 的切线方程为______.

12. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法线方程为 ______.

13. 函数 $u=x^2-2xy+3y^2$ 在点 $(1,1)$ 处方向导数的最大值为______.

14. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-3xyz=1$ 确定的隐函数，则 $z_x=$ ______.

15. 函数 $\cos(x+y)$ 在点 $(0,0)$ 处，带 Peano 余项 $o(x^2+y^2)$ 的 Taylor 展式为 $\cos(x+y)=$ ______.

填空题，续三

16. 设 $f(x, y) = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$，则 $f_x(0, 0) =$ ______，$f_y(0, 0)$ ______.

17. 设 $f(x, y) = x + (y - 1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $f_x(x, 1) =$ ______.

18. 设函数 $f(u, v)$ 连续可微，记 $z(x, y) = f(xy, x - y)$，则微分 $dz =$ ______.

19. 映射 $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的 Jacobi 行列式为 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} =$ ______.

20. 假设映射 $x=e^v+u^3$, $y=e^u-v^3$ 有逆映射 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$，且当 $(u,v)=(0,1)$ 时，$(x,y)=(e,0)$，则偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}(e,0)=$ ______.

21. 记函数 $u=x^2+y^2-xyz$ 在点 $(x,y,z)=(1,0,1)$ 处的梯度方向为 n，则方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,0,1)}=$ ______.

22. 设可微函数 $u(x,y)$ 满足 $u(x,x^2)=1$，且 $u_x(x,x^2)=x$，则 $u_y(x,x^2)=$ ______.

23. 曲线 $x = t,\ y = 2\cos t,\ z = 3\sin t$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为_______.

24. 曲面 $z + \ln z = y + \ln x$ 在点 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ 的切平面方程为_______.

25. 设 $F(x, y) = \int_0^1 \sin(xt)e^{-4yt^2}dt$，则二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 0) =$ _______.

1. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

回答以下问题，并说明理由. (i) 函数在原点处是否连续? (ii) 函数在原点处的两个偏导数 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 是否存在? 若存在，求出这个偏导数; (iii) 函数在原点处是否可微，若可微，求出这个微分.

2. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\leq 1$ 上的最大值和最小值.

计算题第 3, 4, 5 题

3. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上连续可微. 令 $F(y)=\int_0^1 f(x)|y-x|dx$，说明函数 $F(y)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上二次连续可微，并求 $F''(y)$.

4. 计算广义积分 $J=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\sin x dx$.

5. 设函数 $f(x,y)=x+y+\frac{1}{xy}$，记平面第一象限为 $\mathbb{R}_+^2: x>0$, $y>0$. 问函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}_+^2$ 上是否存在最大值和最小值，并说明理由. 在最值存在的情况下，求出最值点和最值.

6. 设函数 $z(x,y)$ 在右半平面 $y>0$ 上二阶连续可微，满足微分方程 $z_{xx}-yz_{yy}=\frac{1}{2}z_y$. 作变换 $u=x-2\sqrt{y}$, $v=x+2\sqrt{y}$, 其逆变换记作 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. 求函数 $w(u,v)$ 所满足的微分方程，其中 $w(u,v)=z(x(u,v),y(u,v))$.

7. 求以原点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 为中心，四个顶点都在椭球面 $5x^2+3y^2+7z^2=1$ 的长方体，使得这个长方体的体积最大.

8. 计算含参变量的广义积分

$$J(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx,$$

其中 $a>0$. (提示：可利用 Euler 积分公式 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

9. 求常微分方程组

$$\begin{cases} x' = y + kx(x^2+y^2), & x' = \frac{dx}{dt}, \\ y' = -x + ky(x^2+y^2), & y' = \frac{dy}{dt}, \end{cases}$$

在极坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 变换下的常微分方程组.

10. 求函数 $u = x^y y^z z^x$ $(x, y, z > 0)$ 的微分.

11. 设 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, 且 $f(1, 1) = 1$. 记 $a = f_x(1, 1)$, $b = f_y(1, 1)$. 再记 $\phi_1(x) = f(x, x)$, $\phi_2(x) = f(x, \phi_1(x))$, $\cdots$, $\phi_n(x) = f(x, \phi_{n-1}(x))$. 求 $\phi_n'(1)$.

12. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微，$x=x(t)$，$y=y(t)$ 在某开区间上也是二次连续可微. 记 $u(t)=f(x(t),y(t))$，求 $u''(t)$.

13. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上二次连续可微，记 $u(x,y)=f(x,y,xe^y)$，求二阶混合偏导数 $u_{xy}(x,y)$.

14. 求解一阶偏微分方程的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y, \\ z(x,0)=x,\ z(0,y)=y^2. \end{cases}$$

15. 证明方程 $x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$ 在点 $(x, y) = (0, 1)$ 附近确定了一个 C^∞ 隐函数 $y = y(x)$ 满足 $y(0) = 1$. 求 $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$.

16. 求 $f(x, y) = xy^3 - x$ 在闭单位圆盘 $\overline{D} : x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值和最小值.

17. 设 $f(x,y)=e^{3x}+y^3-3ye^x$. (i) 求 $f(x,y)$ 的所有驻点，并找出其中所有的极值点，并说明极值点的类型; (ii) 求 $f(x,y)$ 在这些驻点处的二阶 Taylor 多项式; (iii) 求水平曲线 $f(x,y)=3$ 在点 $(x,y)=(0,-1)$ 处的切线和法线方程; (iv) 证明方程 $f(x,y)=3$ 在点 $(x,y)=(0,-1)$ 附近确定了一个隐函数 $x=x(y)$，并求 $x=x(y)$ 在 $y=-1$ 处的二阶 Taylor 多项式.

18. 求函数 $f(x,y)$，使得 $df=(y^2+ye^{xy})dx+(2xy+xe^{xy})dy$，其中 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^2 的.

证明题第 1, 2 题

1. 证明函数 $f(x,y) = x^2e^{-x^2-y^2}$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上存在最大值，即存在点 $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$，使得 $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$. 进一步求出函数 $f(x,y)$ 所有的最大值点.

2. 设 $f(x,y)$ 为全平面 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微函数. 假设 $f(x,y)$ 的 Hesse 矩阵处处正定，即实对称矩阵

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}(x,y)$$

正定，$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. 证明函数 $f(x,y)$ 至多有一个驻点.

3. 设 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为连续可微映射. 假设 (i) 映射 f 的 Jacobian 矩阵处处非奇, 即 n 阶矩阵 $Df(x)=[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}](x)$ 非奇, $\forall x\in\mathbb{R}^n$; (ii) $\lim_{\|x\|\to+\infty}\|f(x)\|=+\infty$. 证明映射 f 有零点, 即存在一点 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 使得 $f(\xi)=0$.

4. 设 $D=\{(x,y),x\in\mathbb{R},y\in[a,b]\}$, $f(x,y)$ 在 D 上连续. 记 $\phi(x)=\min\{f(x,y),y\in[a,b]\}$, 证明函数 $\phi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

证明题第 5, 6 题

5. 设 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微，若

(i) $f_x(x,y) \equiv g_y(x,y)$，$f_x(x,y) \equiv g_y(x,y)$，$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) $f^2(x,y) + g^2(x,y) \equiv 1$，$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$，

证明 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 均为常数函数.

6. 设 $J(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2xy)dx$，$y \in \mathbb{R}$. 证明 $J(y)$ 可表为

$J(y) = e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} dt$.

7. 设 D 为平面有界开域, $f(x,y)$ 为边界 ∂D 上的连续函数. 证明至多存在一个在有界闭域 $\overline{D}$ 连续, 在 D 上为 C^2 的函数 u 满足

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = e^u, & (x,y) \in D, \\ u = f, & (x,y) \in \partial D. \end{cases}$$