微积分 A2 多元积分复习

Ben Hou

Tsinghua University

May 2021

目录

1. 重积分
    - 概念和性质
    - 计算方法
    - 问题
2. 曲线积分
    - 第一型曲线积分
    - 第二型曲线积分
    - Green 公式
    - 问题
3. 曲面积分
    - 第一型曲面积分
    - 第二型曲面积分
    - Stokes 公式
    - 问题

目录

可积性理论

基本概念

分划, 标志点组, Riemann 和, Darboux 上和和 Darboux 下和, etc.

定理

设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界闭集, f 是 D 上的一个有界函数. 如果 f 在 D 内的间断点是零面积集, ∂D 也是零面积集, 那么 f 在 D 上 Riemann 可积.

性质

设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界闭集而且 ∂D 是零面积集, $f, g \in R(D)$, 则有:

- (线性) 对于任意 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda f + \mu g \in R(D)$ 而且 $\int_D (\lambda f + \mu g) dV = \lambda \int_D f dV + \mu \int_D g dV$.
- (保序性) 若 $f \leq g$(处处成立), 则 $\int_D f dV \leq \int_D g dV$.

重积分性质

性质

设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界闭集而且 ∂D 是零面积集, $f, g \in R(D)$, 则有:

- (可加性) 若 $D_1, D_2 \subset \mathbf{R}^n$ 满足上述要求且 $D_1 \cap D_2$ 是零面积集, $f \in R(D_1), R(D_2)$, 则 $f \in R(D_1 \cup D_2)$ 而且 $\int_{D_1 \cup D_2} f dV = \int_{D_1} f dV + \int_{D_2} f dV$.
- (绝对值不等式) 有结论 $|f| \in R(D)$ 而且

$$\left| \int_D f dV \right| \leq \int_D |f| dV.$$

- (积分中值定理) 设 D 还是一个连通集, f, g 进一步是 D 上的连续函数, g 在 D 上不变号, 则存在 $\xi \in D$ 使得

$$\int_D fg dV = f(\xi) \int_D g dV.$$

方法 I: 累次积分

命题 (以二重积分为例)

记 $D=[a,b]\times[c,d]$, 设 $f\in R(D)$, 如果对于任意 $x\in[a,b]$, 函数 $f(x,y)$ 都关于 y 在 $[c,d]$ 上可积, 则有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dx\int_a^b f(x,y)dy.$$

注

在含参积分中, 我们证明过: 如果 $f\in C(D)$, 则

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\iint_D f(x,y)d\sigma.$$

一般直接使用累次积分解决的问题都伴随着换序这一过程.

方法 II: 变量代换

定义

设 $G \subset \mathbf{R}^n$ 是一个开集，$T: G \to \mathbf{R}^n$ 是一个 C^1-光滑单射而且 $\det DT(\mathbf{u}) \neq 0$ 对于任意 $\mathbf{u} \in G$ 成立，则称 T 是一个**正则变换**.

命题

设 $G \subset \mathbf{R}^n$ 是一个开集，$T: G \to \mathbf{R}^n$ 是一个正则变换，$\Omega \subset G$ 是一个闭矩形，$f \in C(T(\Omega))$，则有

$$\int_{T(\Omega)} f(\mathbf{x})\, dV = \int_{\Omega} f(T(\mathbf{u}))|\det DT(\mathbf{u})|\, dV.$$

示警

累次积分换元建议先变成重积分，换元之后再变成累次积分.

例子

坐标系变换

常用的一类变量代换是坐标系的变换: 2 维中的极坐标系, 3 维中的柱坐标系和球坐标系.

极坐标系:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
dxdy &= rdrd\theta
\end{aligned}
$$

柱坐标系:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
z &= z \\
dxdydz &= rdrd\theta dz
\end{aligned}
$$

球坐标系:

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\varphi\cos\theta \\
y &= r\sin\varphi\sin\theta \\
z &= r\cos\varphi \\
dxdydz &= r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta
\end{aligned}
$$

方法 III: 对称性

同时关注积分区域和函数.

试举一例: 当积分区域 D 对称于 x 轴时, 如果函数 $f(x,y)$ 关于变量 y 是奇函数 (即 $f(x,-y)=-f(x,y)$), 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=0.$$

如果是偶函数 (即 $f(x,-y)=f(x,y)$), 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D'} f(x,y)dxdy,$$

其中 D' 是 $D\cap\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x\geq 0\}$.
对称于 y 轴? 对称于原点?

问题 A

请计算下列积分.

1. $I=\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx$.
2. $I=\iint_{x^2+y^2\leq 1}|3x+4y|dxdy$.
3. $I=\iint_D x\sin(y^3)dxdy$, 其中 D 是由曲线 $y^2=x$ 和 $x=1$ 围成的有界区域.
4. $I=\iiint_\Omega (x+y+z)dxdydz$, 其中 Ω 是曲面 $2z=x^2+y^2$ 和曲面 $x^2+y^2+z^2=3$ 所围成的区域.
5. $I=\iint_D x^5y^{11}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|1\leq x^{-1}y^2\leq 2, 3\leq x^3y^2\leq 4\}$.
6. $I=\iint_D xdxdy$, 其中 D 是以 $(x_i,y_i), 1\leq i\leq 3$ 为顶点, 面积为 A 的三角形.

问题 B

- 请证明球的单层位势表达式，其中 $a^2+b^2+c^2>R^2$.

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

- 设 $f(x)\in R[a,b]$，请证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx.$$

- 设 $\Omega=(a,b)\times(c,d)$ 是一个开矩形，$f(x,y)$ 是 Ω 上的连续函数. 如果对于任一闭矩形 $B\subset\Omega$ 都有 $\int_B f(x,y)d\sigma=0$，请证明 $f(x,y)\equiv 0$.

目录

C^1-正则曲线

定义

我们称 $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ 是一条 C^1-**正则曲线**，如果它满足以下两个条件：

- 参数表达式 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 中 $x(t), y(t), z(t) \in C^1[a, b]$.
- $D\gamma(t) \neq 0$ 对于任意 $t \in (a, b)$ 成立.

进一步地，如果区间 $[a, b]$ 存在一个有限分划 $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$，使得 $\rho : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ 限制在每个 $[t_i, t_{i+1}] (0 \leq i < n)$ 上是正则的 C^1 参数曲线，则称 ρ 是一条**逐段 C^1-正则曲线**.

以下出现的曲线都是逐段 C^1-正则曲线.

注

曲线和下面要讨论的曲面的严格定义出现在**微分几何**一门课程中，我们不能深入讨论. 曲线曲面积分的一般形式则涉及**几何测度论**一课，需要使用的工具是 **Hausdorff 测度**.

第一型曲线积分

定义

设 $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ 是一条 (逐段 C^1-正则) 曲线, **函数** $f : \mathrm{Im}\,\gamma \to \mathbf{R}$. 将 $[a, b]$ 作分划 $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$, 从而诱导 γ 上的分划 $\Delta\gamma_i (1 \leq i \leq n)$. 每段 $\Delta\gamma_i$ 的长记作 Δs_i. 任取 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta\gamma_i$, 记 $\lambda = \max_{1\leq i\leq n} \Delta s_i$. 若以下极限存在, 则称极限值为 f 在 γ 上的 **(第一型) 曲线积分**,

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i =: \int_L f(x, y, z)\,ds.$$

注

考查参数形式 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. 如果 $f \in C^1(\mathrm{Im}\,\gamma)$, 则有

$$\int_L f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

第二型曲线积分

这节我们进一步假设曲线不发生自交. 粗略地说, 我们认为 $\gamma(t):[a,b]\to\mathbf{R}^3$ 中参数 t 增加的方向规定了曲线的正方向, 减少的方向给定负方向. 记 $A=\gamma(a), B=\gamma(b)$, 此时又记带方向的曲线 γ 为 $\overset{\frown}{AB}$.

定义

假设如上, 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上给定**向量值函数** $\mathbf{F}:\overset{\frown}{AB}\to\mathbf{R}^3$. 同时考虑以上分划过程及记号, 并记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, \Delta y_i=y_i-y_{i-1}, \Delta z_i=z_i-z_{i-1}$. 如果以下极限值存在, 则称极限是向量值函数 $\mathbf{F}(\mathbf{x})=(P(\mathbf{x}),Q(\mathbf{x}),R(\mathbf{x}))$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的 **(第二型) 曲线积分**,

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i =: \int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy+Rd$$

$$=: \int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot dl.$$

计算方法

注

易见

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}.$$

注

如果 $\overset{\frown}{AB}$ 由 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ 给出正方向而且向量值函数 $\mathbf{F} = (P, Q, R) \in C(\overset{\frown}{AB})$，则有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

Green 公式

设 D 是一个平面有界闭区域, ∂D 是有限条互不相交的闭曲线的并, L 是 ∂D 的一条闭曲线.
沿 L 原有正方向前进, 如果区域 D 在左手侧, 则称该方向是 L 与 D 兼容的定向. 否则, 称原有正方向的反方向是 L 与 D 兼容的定向. 记 ∂D^+ 为所有 ∂D 上的闭曲线, 而且所有曲线的正方向都与 D 兼容.

定理 (Green 公式)

假设如上. 给定向量值函数 $\mathbf{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)):D\to\mathbf{R}^2$ 满足 $P,Q\in C^1(D)$, 那么我们有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial D^+}Pdx+Qdy=\int_{\partial D^+}\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{l}.$$

问题 A

1. 请计算第一型曲线积分 $I=\int_L x^2 ds$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线.
2. 请计算第二型曲线积分 $I=\int_{\widehat{AB}} ydx-xdy$. 其中 $A=(1,1), B=(2,4)$. 而 $\int_{\widehat{AB}}$ 分为以下两种情况:
   - $\int_{\widehat{AB}}$ 是连接 A,B 的直线.
   - $\int_{\widehat{AB}}$ 沿抛物线 $y=x^2$.
3. 请计算第二型曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. 而 L 分为以下两种情况:
   - $L: x^2+y^2=a^2$ 沿逆时针方向.
   - L 是区域 $D: |x|\le 1, |y|\le 1$ 的边界, 方向与区域兼容.
   - 环绕原点一周的 C^1-正则不自交闭曲线.
   - 环绕原点两周的 C^1-光滑闭曲线 (除至多一点外正则).
4. 请计算第二型曲线积分 $I=\int_{\widehat{AO}}(e^x\sin y-y^2)dx+e^x\cos ydy$, 其中 $\widehat{AO}$ 是从 $A=(a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$.

问题 B(调和函数的刻画)

设 Ω 是一个平面单连通开区域, $u(x,y) \in C^2(\overline{\Omega})$. 我们称 u 是一个**调和函数**如果 u 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

在此假设下开展以下问题.

1. 请证明 u 是一个调和函数的一个等价描述是对于任意圆 $B \subset \Omega$, 都有
$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = 0.$$
2. (Poisson 公式) 请证明 u 是一个调和函数的一个等价描述是对于任意 $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$ 都有
$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) d\theta,$$
其中 $0 < r < d(P_0, \partial\Omega)$.

第二型曲线积分与路径无关

命题

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是一个**单连通**开区域, 向量值函数 $\mathbf{F}(x, y) : D \to \mathbf{R}^2$ 是 C^1 的. 以下命题等价:

1. $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$.
2. 任取 $A, B \in D$, 任取路径 L_1, L_2 从 A 至 B 都有 $\int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$.
3. 沿任何闭环路 C 的环路积分等于 0.
4. 存在某个函数 $u(x, y)$ 使得 $du = F_1 dx + F_2 dy$.

注

性质 2,3 等价不需要单连通的条件, 但性质 1 涉及, 更多的知识需要进一步地讨论**代数拓扑**中的**上同调**理论, 它研究**闭**微分形式和**恰当**微分形式.

问题 C(线积分和积分路径)

1. 请问下列第二型曲线积分在区域 Ω 上是否和路径相关?
   - $I_1 = \displaystyle\int_{AB} \frac{xdx + ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, 而 $\Omega : y > 0$.
   - $I_2 = \displaystyle\int_{AB} \frac{xdx + ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, 而 $\Omega : x^2 + y^2 > 0$.
   - $I_3 = \displaystyle\int_{AB} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, 而 $\Omega : x^2 + y^2 > 0$.
2. 请证明在平面区域 $x^2 + y^2 > 0$ 上, 向量场

$$\mathbf{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

是保守场.

目录

基本概念

定义 (逐片 C^1 光滑-正则曲面)

考查 C^1 光滑向量值函数 $\mathbf{r} : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, 其形式为 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. 如果向量 $\mathbf{r}'_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \mathbf{r}'_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ 之间线性无关, 则称 $S = \mathrm{Im}\,\varphi$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一张 C^1 **光滑-正则曲面**.

同理可以定义**逐片** C^1 **光滑-正则曲面**.

以下讨论中, 默认所有曲面是由参数方程给出的逐片 C^1 光滑-正则曲面, 并保持如上记号体系.

定义 (曲面面积)

记 $E = \langle \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_u \rangle, G = \langle \mathbf{r}'_v, \mathbf{r}'_v \rangle, F = \langle \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v \rangle$. 则曲面 S 的面积是

$$\mathrm{Area}(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

第一型曲面积分

定义 (第一型曲面积分)

设 S 是 (逐片 C^1 光滑-正则) 曲面, $f: S \to \mathbf{R}$. 作 S 的分划 $\mathcal{P} := \{\Delta S_i | 1 \le i \le n\}$, 每一小片面积记为 Δs_i. 在每个小片上任取 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, 记 $\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(\Delta S_i)$. 如果下面极限值存在, 则称它是 f 在 S 上的 **(第一型) 曲面积分**,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \Delta s_i =: \iint_S f(x, y, z) dS.$$

注

若 S 是由参数形式 $\mathbf{r}(u, v) : D \to \mathbf{R}^3$ 给出的, $f(x, y, z) \in C(S)$, 则有

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

第二型曲面积分

这节总假设 S 是一张可定向曲面. 记 $\mathbf{n}=\mathbf{r}_u'\wedge\mathbf{r}_v'$ 为曲面 S 的**外法向量**. 记 $\mathbf{N}=\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$ 是单位外法向量. S 的正方向取作 $\mathbf{r}_u',\mathbf{r}_v',\mathbf{n}$ 成右手系的方向, 否则称为负方向. 下列讨论保持以上假设.

定义

设向量值函数 $\mathbf{F}:S\to\mathbf{R}^3$ 是 S 上连续函数, 定义

$$\iint_S \langle\mathbf{F},\mathbf{N}\rangle\, dS =: \iint_S F_1 dy\wedge dz + F_2 dz\wedge dx + F_3 dx\wedge dy$$

为向量值函数 $\mathbf{F}$ 的 **(第二型) 曲面积分**.

注

易见, 若 S 取定正方向,

$$\iint_S F_1 dy\wedge dz + F_2 dz\wedge dx + F_3 dx\wedge dy = \iint_D \langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\, dudv.$$

Gauss 公式

设 $D \subset \mathbf{R}^3$ 是一个有界闭区域, ∂D 由有限个逐段光滑, 互不相交的闭曲面构成且整体可定向. 设向量值函数 $\mathbf{F} \in C^1(D)$, 它的**散度**定义为:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

定理 (Gauss 公式)

上述前提下有

$$\int_{\partial D^+} F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz.$$

其中 ∂D^+ 指外法线方向定义的曲面正向.

Stokes 公式

上述前提下, 向量值函数 $\mathbf{F} \in C^1(D)$ 的**旋度**定义为:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

定理 (Stokes 公式)

设有界曲面 $S \subset \mathbf{R}^3$ 是一个分块光滑可定向曲面, ∂S 由有限个逐段光滑, 互不相交的闭曲线构成. 设向量值函数 $\mathbf{F}: \Omega \to \mathbf{R}^3$ 是 C^1 的, 其中 Ω 是包含 S 的一个开集. 则有

$$\int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S^+} \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

注

微分形式下的 Stokes 公式包含 Green 公式和 Gauss 公式.

问题 A

1. 请计算第一型曲面积分 $I = \iint_S (x+y+z)dS$, 其中 $S: x^2+y^2+z^2=a^2, z \geq 0$.
2. 请计算第二型曲面积分 $I = \iint_S \frac{xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 而 S 分为以下两种情况:
   - $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ 沿正向.
   - $S: x^2+y^2+z^2=a^2, z \geq 0$.
   - 环绕原点一周的 C^1-正则不自交闭曲面.
3. 请计算第二型曲面积分 $I = \iint_S x^2dy\wedge dz + y^2dz\wedge dx + z^2dx\wedge dy$, 其中 S 是锥面 $x^2+y^2=z^2(0 \leq z \leq h)$ 所示部分的外侧.
4. 计算第二型曲线积分 $\oint_C ydx+zdy+xdz$, 其中 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线, 从 Ox 轴正向看去, C 是沿逆时针方向前行.

问题 B(Green 定理)

设 D 是一个单连通闭区域，$S=\partial D$ 是一条 C^1-正则不自交闭曲面，函数 $u(x,y,z), v(x,y,z)\in C^2(D)$. 请证明

$$\iint_S v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS=\iiint_D v\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]dxdydz$$
$$+\iiint_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]dxdydz.$$

问题 C(调和函数的表现)

设 D 是一个单连通闭区域，$S=\partial D$ 是一条 C^1-正则不自交闭曲面，函数 $u(x,y,z)\in C^2(D)$，我们称 u 是 D 上的**调和函数**如果 u 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

设 $u,v\in C^2(D)$，u 是 D 上的调和函数，在此条件下讨论问题.

1. 进一步假设 $u|_S=0$，请证明 u 在 D 上恒为 0.
2. 假设 $[w(x,y,z)-u(x,y,z)]|_S=0$，请证明

$$\begin{aligned}&\iiint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz\\ &\quad\le\iiint_D\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz.\end{aligned}$$

问题 D(闭形式和恰当形式在 $\mathbf{R}^3$ 上的表现)

设 $D=\overline{B(0,1)}\subset\mathbf{R}^3$, $P,Q,R\in C^1(D)$. 证明以下命题等价:

1. 对于任意 $S_1,S_2\subset D$ 是两定向光滑曲面, $\partial S_1=\partial S_2$ 而且由 S_1,S_2 的定向决定的边界正定向相同, 则有
$$\iint_{S_1} Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iint_{S_2} Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy.$$
2. 任取 S 是 D 内光滑闭曲面都有
$$\iint_S Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=0.$$
3. $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0.$
4. 存在 η 使得 $d\eta=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$.