

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A(1) (B)

2021 年 12 月 29 日

一. 填空题 (每空 3 分, 共 10 题) (请将答案直接填写答题卡相应横线上!)

1. $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x^2}\right)$ 的斜渐近线为_____.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right) =$ _____.

3. 记 $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(\pi t^2) dt$, 则 $F'(1) =$ _____.

4. 设 $f(x) = \min\{x^2, 1\}$, 则 $\int_0^2 f(x) dx =$ _____.

5. 常微分方程 $y' + 2xy = 2x$ 的通解为_____.

6. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 1} =$ _____.

7. 常微分方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ ($x > 0$) 的通解为_____.

8. 设 $p > 0$, 广义积分 $\int_1^{+\infty} x^2 \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x^p}\right) dx$ 收敛, 则实数 p 的取值范围为_____.

9. 由曲线段 $y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$, $x \in [1, 4]$ 绕 x 轴旋转一周所成旋转面的面积为_____.

10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $2 \int_1^x f(t) dt = xf(x) + x^2$, 则 $f'(1) =$ _____.

二. 解答题 (请写出详细的解答过程和必要的根据)

11. (10分) 求积分 $\int_0^e \cos(\ln x) dx$ 的值。

12. (10分) 求常微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ 的通解。

13. (15分) 求函数 $y = 4e^{-x}(2x^2 + x + 1) - 5$ 的单调区间, 极值, 上凸区间与下凸区间, 以及拐点的横坐标。

14. (10分) 设 D 为 $y = \sqrt{x(1-x)}$ 与 x 轴围成的有界区域。

(I) 求 D 的面积;

(II) 求 D 绕 x 轴一周所成旋转体体积。

15. (10分) 设平面曲线 $y = y(x)$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = 0$, 且对曲线上任意点 $P(x, y)$ ($x > 0$), 沿曲线从点 $(0, 1)$ 到点 $P(x, y)$ 的弧长等于该曲线在点 $P(x, y)$ 的切线斜率, 求 $y(x)$ ($x > 0$)。

16. (8分) 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上以 T 为周期的周期函数, 且连续, 证明:

(I) 函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt$ 是以 T 为周期的周期函数;

(II) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ 。

17. (7分) 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1$, 且对 $x \geq 1$ 时, 有 $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$ 。

(I) 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且有限;

(II) 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$ 。

附加题 (本题为附加题, 全对才给分, 其分数不计入总评, 仅用于评判 A+)

设 $f \in C[0, 1]$, g 为非负的周期函数, 周期为 1, 且 $g \in R[0, 1]$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) g(nx) dx = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(x) dx \right)。$$