

## 期末考试考试样卷

考试课程 微积分 A1 试卷 A

系名\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 题) (请将答案直接填写在横线空白处, 不必另写在答题纸上)

1. 设函数  $f(x)$  在实轴上连续, 且满足积分方程  $f(x) = x + \int_0^x f(s)ds$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_。

2. 定积分  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx =$  \_\_\_\_\_。

3. 广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} =$  \_\_\_\_\_。

4. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2014$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt =$  \_\_\_\_\_。

5. 定积分  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^3 + 1}{\cos^2 x} dx =$  \_\_\_\_\_。

6. 不定积分  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx =$  \_\_\_\_\_。

7. 平面区域  $\{(x, y), 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \sin x\}$  绕  $x$  轴旋转所得的旋转体体积为\_\_\_\_\_。

8. 常微分方程  $(x^2 + 1)(y^2 + 1)dx + 2ydy = 0$  的通解为\_\_\_\_\_。

9. 曲线  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$  唯一拐点的横坐标为\_\_\_\_\_。

10. 定积分  $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx =$  \_\_\_\_\_。

11. 星形线  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ) 的弧长为\_\_\_\_\_。

12. 一阶常微分方程  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$  的通解为\_\_\_\_\_。

13. 常微分方程  $y'' = \frac{2y'x}{1+x^2}$  满足初值条件  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$  的解为\_\_\_\_\_。

14. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2} =$  \_\_\_\_\_.

15. 使得广义积分  $\int_0^1 \frac{\ln(\cos x)}{x^p} dx$  收敛的实数  $p$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

二. 计算题 (每题 10 分, 共 4 题) (请写出详细计算过程和必要的根据!)

1. 计算定积分  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$ .

2. 求函数  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$  的(i)渐近线(如果存在的话); (ii)单调区间; (iii)极值点和极值; (iv)凸性区间和拐点. 根据上述信息, 大致画出  $f(x)$  的函数图像。

3. 求由参数方程  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ) 确定的曲线绕  $x$  轴旋转一周所得旋转面的面积。

4. 设函数  $f(x)$  在实轴上连续, 且满足积分方程  $f(x) = 4e^x + \int_0^x (x-s)f(s)ds, \forall x \in R$ . 求  $f(x)$  的表达式。

三. 证明题 (请写出详细的证明过程!)

1. (8 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 且  $f(x) > 0, \forall x \in [0,1]$ . 证明

$$e^{\int_0^1 \ln f(x) dx} \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

2. (7 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0,+\infty)$  上连续可微, 且  $f(x) > 0, f'(x) > 0, \forall x \in [0,+\infty)$ . (i)

证明广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx$  收敛; (ii) 进一步假设广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x) + f'(x)}$  收敛, 证明广义

积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$  也收敛。