清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　**微积分 A(1)**　(A)　2017 年 1 月 11 日

系名________ 班级________ 姓名________ 学号________

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（请将答案直接填写在横线上！）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的极大值点是 $x=$________.

2. 函数 $f(x)=x+\sqrt{1-x}$ 在区间 $[-5,1]$ 上的最小值为________.

3. 设曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 有 k 条渐近线，则 $k=$____.

4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$ 在 $x_0=2$ 处的 $2n$ 阶 Taylor 多项式为________________.

5. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{C}$，则 $\int[f'(x)-2f(x)]\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=$________________.

6. $\int\dfrac{8}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x=$____________.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right)=$__________.

8. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{\pi^2-x^2})^2\mathrm{d}x=$________.

9. 设 $f(x)=\int_0^{x-\sin x}(1-\cos t^2)\mathrm{d}t$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}=C\neq 0$，则 $k=$____.

10. 曲线 $y=\int_0^x\tan t\,\mathrm{d}t\quad(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4})$ 的弧长为__________.

11. 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=\mathrm{e}+1-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积为________.

12. 曲线 $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为__________.

13. 设 $p>0$，广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^{2p})(\ln(1+x))^p}\mathrm{d}x$ 收敛，则实数 p 满足______________.

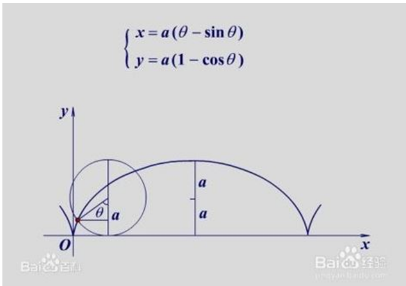
14. 微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^x$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解为__________________.

15. 微分方程 $x^2y''-xy'+y=0\ \ (x>0)$ 的满足 $y(1)=1, y'(1)=0$ 的特解为_____________.

二．计算题（每题 **10** 分，共 **4** 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的定义域，单调、凸性区间，极值、拐点和渐近线.

2. 求广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$.



3. 设 $a>0$，求旋轮线 $x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$

$(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周生成旋转面的面积.

4. 设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y^{(4)}(x)-y''(x)=0$，且当 $x\to 0$ 时，$y(x)\sim x^3$，求 $y(x)$.

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

1. （**7** 分）设 $x\in(-1,1)$，证明不等式：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}$.

2. （**8** 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 令 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

（I）若 $A,B\in(0,+\infty)$，证明 $\int_A^B\dfrac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{g^2(A)}{A}-\dfrac{g^2(B)}{B}+2\int_A^B\dfrac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$；

（II）若广义积分 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant 4\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$$