2017 秋微积分 A 期末考试答案

一．**填空题**（每空 3 分，共 15 题）（**请将答案直接填写在横线上！**）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的极大值点是 $x=$________。 $x=0$

2. **函数** $f(x)=x+\sqrt{1-x}$ **在区间** $[-5,1]$ **上的最小值为**________. $f(-5)=-5+\sqrt{6}$

3. 设曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 有 k 条渐近线，则 $k=$_____。3

4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$ 在 $x_0=2$ 处的 $2n$ 阶 Taylor 多项式为________________。$-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(x-2)^{2k}}{2^{2k+2}}$

5. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{C}$，则 $\int[f'(x)-2f(x)]\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=$___________。$-2\sin x+C$

6. $\int\dfrac{8}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x=$______________。 $\ln\dfrac{x^2}{x^2+4}+C$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right)=$______________。$2\ln 2-1$

8. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{\pi^2-x^2})^2\mathrm{d}x=$________。$2\pi^2$

9. 设 $f(x)=\int_0^{x-\sin x}(1-\cos t^2)\mathrm{d}t$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}=C\neq 0$，则 $k=$______。15

10. 曲线 $y=\int_0^x\tan t dt \quad (0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4})$ 的弧长为___________。$\ln(1+\sqrt{2})$

11. 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=\mathrm{e}+1-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积为________。$\dfrac{3}{2}$

12. 曲线 $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为___________。$\dfrac{\pi^2}{2}$

13. 设 $p>0$，广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^{2p})(\ln(1+x))^p}\mathrm{d}x$ 收敛，则实数 p 满足___________。$\dfrac{1}{2}<p<1$

14. 微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^x$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的解为___________。 $y=e^{2x}-xe^x$

15. 微分方程 $x^2y''-xy'+y=0 \quad (x>0)$ 的满足 $y(1)=1, y'(1)=0$ 的特解为________________。

$y=x-x\ln x$

二．计算题（每题 10 分，共 4 题）**（请写出详细的计算过程和必要的根据！）**

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的定义域, 单调、凸性区间，极值、拐点，渐近线。

解：$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$. ……1 分

$f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x)=0$ 得，$x=\pm 1$。

$f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$，$f''(x)=0, x=\pm\sqrt{3}$。

单调减区间：$(-\infty,-1),(1,+\infty)$

单调增区间：$(-1,1)$

……2 分

上凸区间：$(-\infty,-\sqrt{3}),(0,\sqrt{3})$

下凸区间：$(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},+\infty)$

……2 分

极大值：$f(1)=\dfrac{1}{2}$

极小值：$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$

……2 分

拐点：$(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{4}),(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$ ……2 分

渐近线：$y=0$ ……1 分

2. **求广义积分** $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$。

解：$\int\dfrac{\ln x}{(1+x)^3}dx=-\dfrac{1}{2}\int\ln x d\dfrac{1}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dx}{x(1+x)^2}$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{(1+x)^2}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{(1+x)^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}+C$$

……5 分

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{(1+x)^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}$$ ……5 分

3. 设 $a>0$，求摆线 $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周生成旋转面的面积.

解：$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(\theta-\sin\theta)\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}d\theta$ ……5 分

$$=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(\theta-\sin\theta)\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}(t-\sin t\cos t)\sin tdt$$

$$=16\pi^2a^2$$

……5 分

若做成绕 x 轴旋转成的旋转面面积

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}d\theta=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{64}{3}\pi a^2$$

得 5 分

4. **设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y^{(4)}(x)-y''(x)=0$，且当 $x\to 0$ 时，$y(x)\sim x^3$，求 $y(x)$。**

解：方程 $y^{(4)}-y''=0$ 的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4=-1$，故方程的通解为

$y(x)=C_1+C_2x+C_3\mathrm{e}^x+C_4\mathrm{e}^{-x}$ 。 ……4 分

由于当 $x\to 0$ 时，

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\circ(x^3)\ ,$$ ……1 分

$$\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\circ(x^3),$$ ……1 分

于是当 $x\to 0$ 时，

$$y(x)=(C_1+C_3+C_4)+(C_2+C_3-C_4)x+\frac{C_3+C_4}{2}x^2+\frac{C_3-C_4}{6}x^3+\circ(x^3),$$

由此知，欲使 $x\to 0$ 时，$y(x)\sim x^3$，只需要 $\begin{cases} C_1+C_3+C_4=0 \\ C_2+C_3-C_4=0 \\ C_3+C_4=0 \\ C_3-C_4=6 \end{cases}$

解之得，$C_1=0;\ C_2=-6;\ C_3=-C_4=3$。 ……4 分

即 $y(x)=-6x+3\mathrm{e}^{x}-3\mathrm{e}^{-x}$。

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

1. （7 分）设 $x\in(-1,1)$，证明不等式：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}$。。

证明：设 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，则 $F(0)=0$；

$F'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$，$F'(0)=0$； ……1 分

$F''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\geqslant 0,\quad x\in(-1,1)$， ……2 分

所以 $F'(x)$ 单调增，$F'(x)\geqslant 0,\quad x\in(0,1);\qquad F'(x)\leqslant 0,\quad x\in(-1,0)$， ……2 分

故 $F(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 的最小值，即 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geqslant 0,\quad x\in(-1,1)$。

……2 分

除去以上标准的求导验证极值的做法，也可以用常用的不等式证得该题（可作为解法二）

需要用两个结论：

1. $\ln(1+x)\le x$

2. $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$

这两条均可用求函数极值或者直接用含 Lagrange 余项的 Taylor 展式证明。由于欲证不等式两边都是偶函数，只证 $x>0$ 的情况：

因为 $x\ln\frac{1+x}{1-x}=x\ln(1+x)-x\ln(1-x)\ge -x\ln(1-x)\ge -x\cdot(-x)=x^2$，$\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$，

相加得原不等式成立。

2. （8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 令 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，

（I）若 $A,B\in(0,+\infty)$，证明 $\int_A^B \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{g^2(B)}{B}-\frac{g^2(A)}{A}+2\int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$；

（II）若广义积分 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$$

证明：(I) $\int_A^B \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_A^B g^2(x)\mathrm{d}(\frac{1}{x})=-\frac{g^2(x)}{x}\bigg|_A^B+2\int_A^B\frac{g(x)g'(x)}{x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{g^2(A)}{A}-\frac{g^2(B)}{B}+2\int_A^B\frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$$ ……3 分

(II) 令 $A=\varepsilon>0, B=M>\varepsilon$，由 (I) 得

$$\int_\varepsilon^M \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{g^2(\varepsilon)}{\varepsilon}-\frac{g^2(M)}{M}+2\int_\varepsilon^M\frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{g^2(\varepsilon)}{\varepsilon}+2\int_\varepsilon^M\frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$$

由已知 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g^2(x)}{x}=0$$

所以令 $\varepsilon\to0^+$，$\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant2\int_0^M\frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$。

由 Cauchy 不等式，$\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant2\left(\int_0^M f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$。

因为 $\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\geqslant0$，所以无论 $\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=0$ 或 $\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x>0$，不等式

$$\left(\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant2\left(\int_0^M f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

均成立。故 $\int_0^M\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant4\int_0^M f^2(x)\mathrm{d}x$.

因为广义积分 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，所以广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 也收敛，且

$$\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant4\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$$ ……5 分