

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A A 卷 期末考试样题

系名 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 题) (请将答案直接填写在横线上!)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n+i)(n+2i)} =$ _____。

2. $\int x^2 e^x dx =$ _____。

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2) dt}{x^3} =$ _____。

4. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{2x} \ln(1 + \sin t) dt =$ _____。

5. 求曲线 $y = e^x$ 、 $y = -\cos \pi x$ 、 $x = -\frac{1}{2}$ 、 $x = \frac{1}{2}$ 围成的区域面积 _____。

6. $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx =$ _____。

7. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} =$ _____。

8. $\int_1^2 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} =$ _____。

9. 悬链线 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $|x| \leq 1$ 的弧长 $L =$ _____。

10. 二阶方程 $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$ 的通解为 _____。

11. 一阶线性常微分方程组 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 2z \\ \frac{dz}{dx} = 2y + z \end{cases}$ 的通解为 _____。

12. 设 x, x^2 是二阶齐次线性常微分方程的解, 则该微分方程为_____。

13. $y'' + 6y' + 10y = 0$ 的通解为_____。

14. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解为_____。

15. 常微分方程 $y' - \frac{6}{x}y = -xy^2$ 的通解为_____。

二. 计算题 (每题 10 分, 共 4 题) (请写出详细计算过程和必要的根据!)

1. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$ 。

2. 求曲线 $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos t \\ y = -1 + \sqrt{2} \sin t \end{cases}$, $\left(\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}\pi\right)$ 绕 x 轴旋转的旋转体体积及表面积。

3. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = (3x + 2)e^{-x}$ 的通解。

4. 求一条曲线 $\Gamma: y = y(x)$, 其中 $y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是连续可微的, 使得曲线 Γ 上的每一点切线与横轴交点的坐标等于切点横坐标的一半。

三. 证明题 (请写出详细的证明过程!)

1. (8 分) 设 $f \in C[0, 1]$, 利用分部积分证明 $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t) dt \right] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x) dx$ 。

2. (7 分) 设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数, 考虑一阶线性常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$$

解的情况。

(I) 举出 $a(x), b(x)$ 的一个例子, 使得该方程的解为下列三种情况之一:

- (a) 没有以 2π 为周期的解;
- (b) 只有一个以 2π 为周期的解;
- (c) 任意解都以 2π 为周期。

(II) 证明该方程以 2π 为周期的解的个数只能出现上述三种情况之一。