微积分 A 期末考试样题参考解答

一. 填空题（每空 3 分，共 15 题）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n+2i)}=$____________。

答案：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n+2i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(1+{}^{i}\!/\!_{n})(1+{}^{2i}\!/\!_{n})}\dfrac{1}{n}\to\int_{0}^{1}\dfrac{1}{(1+x)(1+2x)}dx=\ln 3-\ln 2$

2. $\int x^2e^xdx=$____________。

答案：$x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin(t^2)dt}{x^3}=$____________。

答案：$\dfrac{1}{3}$。应用 $L'Hospital$ 法则即可。

4. $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{2x}\ln(1+\sin t)dt=$____________。

答案：$2\ln(1+\sin 2x)-2x\ln(1+\sin x^2)$

5. 求曲线 $y=e^x$， $y=-\cos\pi x$，$x=-\dfrac{1}{2}$，$x=\dfrac{1}{2}$ 围成的区域面积____________。

答案：面积为 $\int_{-1/2}^{1/2}(e^x+\cos\pi x)dx=e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{2}{\pi}$

6. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx=$____________。

答案：$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\cos xdx=\dfrac{4}{3}$

7. $\int\dfrac{dx}{x(x^2+1)}=$____________。

答案：$\int\dfrac{dx}{x(x^2+1)}=\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}\right)dx=\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

8. $\int_1^2\dfrac{dx}{x+\sqrt{x}}=$____________。

答案：$\int_1^2\dfrac{dx}{x+\sqrt{x}}=\int_1^{\sqrt{2}}\dfrac{2tdt}{t^2+t}=2\ln(\sqrt{2}+1)-2\ln 2$

9. 悬链线 $y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$，$|x|\le 1$的弧长 $L=$________________。

答案：弧长为 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'(x)^2}dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(e^{x}-e^{-x})^2/4}dx=e-e^{-1}$

10. 二阶方程 $x^2y''-xy'-3y=0$的通解为____________________。

答案：这是 Euler 方程。以 x^m 代入方程可得关于 m 的特征方程 $m(m-1)-m-3=0$。

解之得 $m=3$，$m=-1$。于是通解为 $y=c_1x^3+c_2/x$。

11. 常微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y+2z\\ \dfrac{dz}{dx}=2y+z\end{cases}$ 的通解为______________________________。

答案：$\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-e^{-x}\\ e^{-x}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^{3x}\\ e^{3x}\end{pmatrix}$

12. 设 x,x^2 是二阶齐次线性常微分方程解，则该微分方程为________________________。

答案：二阶齐次线性常微分方程的一般形式为 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$。将 $y=x$ 和 $y=x^2$ 分别代入方程得 $p(x)+q(x)x=0$，$2+2p(x)x+q(x)x=0$。解之得 $p(x)=-2/x$，$q(x)=2/x^2$。于是所求方程为 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0$。

13. $y''+6y'+10y=0$的通解为______________________________。

答案：$y=C_1e^{-3x}\cos x+C_2e^{-3x}\sin x$

14. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解为______________________________。

答案：作变换 $y=ux$ 得关于 u 的方程为 $x\frac{du}{dx}=\tan u$。这是变量分离型方程。其通解为 $\sin u=Cx$。于是原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x}=Cx$。

15. 常微分方程 $y'-\frac{6}{x}y=-xy^2$ 的通解为______________________。

答案：这是 Bernoulli 型方程。方程两边同除以 y^2，并令 $z=1/y$ 则得关于 z 的一阶线性方程 $z'+6z/x=x$。不难解得该方程的通解为 $z=\frac{C}{x^6}+\frac{x^2}{8}$。于是原方程的通解为

$\frac{1}{y}=\frac{C}{x^6}+\frac{x^2}{8}$。另外方程还有一个特解 $y=0$。

二． **计算题**（每题 10 分，共 4 题）（**请写出详细计算过程和必要的根据！**）

1．计算 $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

解：原式 $=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x(3+\tan^2 x)}\overset{t=\tan x}{=}\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ 。

求曲线$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos t\\ y=-1+\sqrt{2}\sin t\end{cases}$，$\left(\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3}{4}\pi\right)$绕 x 轴旋转的旋转体体积及表面积。

解：我们注意当参数 $t\in[\pi/4,3\pi/4]$ 时， $x\in[0,2]$。它们是一一对应的，但单调性相反。

于是所求体积为$V=\int_0^2\pi y(x)^2dx=\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\pi(-1+\sqrt{2}\sin t)^2\sqrt{2}(-\sin t)dt=2\pi\left(\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$

面积$S=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,2\pi y(t)dt=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}2\pi(-1+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}dt=2\sqrt{2}\pi\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$。

2．求微分方程 $y''+2y'+y=(3x+2)e^{-x}$ 的通解。

解：齐次方程特征值为$\lambda=-1$（二重），齐次方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$ 。

设非齐次方程特解为 $y_1=x^2(ax+b)e^{-x}$，则 $a=2,b=1$。

非齐次方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+x^2(2x+1)e^{-x}$ 。

3．求一条曲线Γ： $y=y(x)$，其中 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是连续可微的，使得曲线Γ上的每一点切线与横轴交点的坐标等于切点横坐标的一半。

解：曲线Γ上的任意一点 $(x,y(x))$ 的切线方程为$Y-y(x)=y'(x)(X-x)$，其中 (X,Y) 为切线上的流动坐标。由假设可知当 $Y=0$ 时， $X=x/2$，于是我们得到曲线Γ的确定方程 $-y(x)=y'(x)(x/2-x)$，即 $xy'(x)=2y(x)$。解得通解为 $y(x)=cx^2$，其中 c 为任意非零常数，因为当 $c=0$ 时曲线Γ上为 x 轴，不满足要求。解答完毕。

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

1．（8 分）设 $f \in C[0,1]$，利用分部积分证明 $\int_0^1 [\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)dt]dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x)dx$。

证明：先将左端分部积分，得

$$\text{左式} = (x\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)dt)\Big|_0^1 - \int_0^1 xd(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)dt)$$

$$= \int_0^1 x(\int_0^{x^2} f(t)dt)'dx - \int_0^1 x(\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt)'dx$$

$$= \int_0^1 xf(x^2)(x^2)'dx - \int_0^1 xf(\sqrt{x})(\sqrt{x})'dx$$

再作积分变量代换。在第一个积分中令 $x^2 = u$，在第二个积分中令 $\sqrt{x} = v$，于是

$$\text{左式} = \int_0^1 \sqrt{u} f(u)du - \int_0^1 v^2 f(v)dv$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx - \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x)dx = \text{右式。证毕。}$$

2.（7 分）设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数，考虑一阶线性常微分方程 $dy/dx = a(x)y + b(x)$ 解的情况。

（I）举出 $a(x), b(x)$ 的一个例子，使得该方程的解为下列三种情况之一：

（a）没有以 2π 为周期的解；
（b）只有一个以 2π 为周期的解；
（c）任意解都以 2π 为周期。

（II）证明该方程以 2π 为周期的解的个数只能出现上述三种情况之一。

解：（I）实际上容易举出三种情况的例子。例如

(i) 取 $a(x) = 0$，$b(x) = 1$，则出现情况（a）.

(ii) 取 $a(x) = 1$，$b(x) = 0$，则出现情况（b）.

(iii) 取 $a(x) = 0$，$b(x) = 0$，则出现情况（c）.

（II）如果（a）（b）均不成立，则方程有两个以上的 2π 周期解，不妨假设 $y_1(x), y_2(x)$ 为方程的两个不同的 2π 周期解，则方程通解为 $y = C(y_1(x) - y_2(x)) + y_1(x)$. 显然方程的每个解均为 2π 周期解。 解答完毕。

注：以下我们具体给出函数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 满足何种条件时，出现上述情形。这些当然已超出

考试的要求。

先注意一个事实：若 $\phi(x)$ 是解，则 $\phi(x)$ 是 2π 周期解的充要条件是 $\phi(0)=\phi(2\pi)$。必要性显然。充分性：易证 $\phi(x+2\pi)$ 也是解，且解 $\phi(x+2\pi)$ 和解 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 处有相同的初值。根据初值问题解的存在唯一性可知它们恒同，即 $\phi(x)$ 是 2π 周期的。 为强调解对初值的依赖关系，我们记方程在 $x=0$ 处的初值为 y_0 的解为 $\phi(x,y_0)$。根据一阶线性方程的求解公式我们有

$$\phi(x,y_0)=e^{\int_0^x a(s)ds}\left(y_0+\int_0^x b(s)e^{-\int_0^s a(t)dt}ds\right)。$$

于是解 $\phi(x,y_0)$ 是 2π 周期的，当且仅当 $\phi(0,y_0)=\phi(2\pi,y_0)$，即

$$y_0=e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds}\left(y_0+\int_0^{2\pi} b(s)e^{-\int_0^s a(t)dt}ds\right),$$ 亦即

$$\left(1-e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds}\right)y_0=e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds}\int_0^{2\pi} b(s)e^{-\int_0^s a(t)dt}ds。\qquad (*)$$

即解 $\phi(x,y_0)$ 是 2π 周期的当且仅当 y_0 满足方程（*）。分两个情形讨论如下：

情形 1：$\int_0^{2\pi} a(s)ds\neq 0$。此时存在唯一的一个 y_0 满足方程（*）。方程仅有一个 2π 周期解.

情形 2：$\int_0^{2\pi} a(s)ds=0$。若 $e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds}\int_0^{2\pi} b(s)e^{-\int_0^s a(t)dt}ds\neq 0$，则不存在 y_0 满足方程（*）。此时方程没有 2π 周期解. 若 $e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds}\int_0^{2\pi} b(s)e^{-\int_0^s a(t)dt}ds=0$，则任意 y_0 均满足方程（*）。这表明此时方程的每个解均为 2π 周期解。