

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 空) (请将答案直接填写在横线上!)

1. $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx =$ _____。

2. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} =$ _____。

3. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx =$ _____。

4. 若 $\int xf(x)dx = \arctan x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)} dx =$ _____。

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x} dx =$ _____。

6. $\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} e^{t^2} dt \right) =$ _____。

7. 设 $f(x)$ 为连续函数, $f(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ _____。

8. 将 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴转一圈, 则所得图形围成的体积为 _____。

9. 设 $m > 0$, 且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^m}}$ 收敛, 则 m 的范围为 _____。

10. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n + (-5)^n}$ 的收敛域为 _____。

11. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}{n^p}$ 条件收敛, 则参数 p 的范围为 _____。

12. 在 $x_0 = 0$ 点, 函数 $\int_0^x e^{-t^2} dt$ 的幂级数展开为 _____。

13. 微分方程 $y' = e^x + e^{x+y}$ 的通解是_____。

14. 微分方程 $xdy + (x - 2y)dx = 0$ 满足 $y(1) = 0$ 的解为_____。

15. 微分方程初值问题 $\begin{cases} y'' + 2x(y')^2 = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$ 的解为_____。

二. 计算题 (每题 10 分, 共 40 分)

1. 求 p 的范围, 使得 $\int_1^{+\infty} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right) \frac{dx}{\ln^p x}$ 收敛。

2. 计算摆线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ ($t \in [0, 2\pi]$) 绕 x 轴旋转体的体积和表面积。

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ 的和。

4. 设 $f(x) \in C(0, +\infty)$, 且对任意 $x > 0$ 满足 $x \int_0^1 f(tx) dt = -2 \int_0^x f(t) dt + xf(x) + x^4$,
 $f(1) = 0$, 求 $f(x)$ 。

三. 证明题

1. (8 分) 已知函数 $y = f(x) = x \ln x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!}$, 求 $f(x)$ 的定义域, 并证明

$y = f(x)$ 满足微分方程 $xy' - y = xe^x$, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(0) = 0$ 。

2. (7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1, \forall x \in [0, 1]$ 。求证:

$$\left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 > \int_0^1 [f(x)]^3 dx$$