一．**填空题**（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx =$ ________________

答案：$\frac{\ln x}{1-x} + \ln|1-x| - \ln x + C$

2. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} =$ ______________________。

答案：$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan x\right) + C$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx =$ ____________________

解：$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$

4. $\int xf(x)dx = \arctan x + C$，则 $\int \frac{1}{f(x)} dx =$ ____________。

答案：$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x} dx =$ ____________________。

答案：$\frac{\pi}{2}$

6. $\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} e^{t^2} dt\right) =$ _________________。

答案：$2xe^{x^4} - e^{x^2}$

7. 设 $f(x)$ 为连续函数，$f(0) \neq 0$，$F(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt$，当 $x \to 0$ 时，$F(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$ ______。

答案：3

8. 将 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴转一圈，则所得图形围成的体积为____________。

答案：$6\pi^2$

9. 设 $m > 0$，且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^m}$ 收敛，则 m 的范围为_____________

答案：$m > 1$

10．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n+(-5)^n}$的收敛域为________ 。

答案：$(-\sqrt{5},\sqrt{5})$

11. 级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{n}}{n^p}$条件收敛，则参数 p 的范围为________________。

答案：$-1<p\le 0$

12.在 $x_0=0$ 点，函数$\int_0^x e^{-t^2}dt$的幂级数展开为

答案：$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$，$x\in\Re$

13. $y'=e^x+e^{x+y}$，的通解是________________。

答案：$\ln\frac{e^y}{1+e^y}=e^x+C$

14. $xdy+(x-2y)dx=0$满足$y(1)=0$的解为______________________。

答案：$y=x-x^2$

15. 初值问题$\begin{cases}y''+2x(y')^2=0\\ y(0)=1,y'(0)=0\end{cases}$的解为______________________。

答案：$y=1$

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1．求 p 的范围，使得$\int_1^{\infty}\sin\frac{\pi}{x}\frac{dx}{\ln^p x}$收敛

解：$\int_1^{+\infty}\sin\frac{\pi}{x}\frac{dx}{\ln^p x}=\int_1^{2}\sin\frac{\pi}{x}\frac{dx}{\ln^p x}\int_2^{+\infty}\sin\frac{\pi}{x}\frac{dx}{\ln^p x}$，

$x=1$附近，$\sin\frac{\pi}{x}\frac{1}{\ln^p x}\sim\pi\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{(x-1)^p}$，所以仅当$2-p>0$时$\int_1^{2}\sin\frac{\pi}{x}\frac{dx}{\ln^p x}$收敛

……………………………………………….5 分

$x\to+\infty,\sin\frac{\pi}{x}\frac{1}{\ln^p x}\sim\frac{\pi}{x\ln^p x}$对任意的 p 成立,所以只需要考虑广义积分$\int_2^{\infty}\frac{\pi}{x\ln^p x}dx$

的收敛性。因为 $\int_2^a \frac{dx}{x\ln^p x} = \int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{du}{u^p}$, 所以仅当 $p>1$时广义积分 $\int_2^{\infty} \frac{\pi}{x\ln^p x}dx$ 收敛.

……………………………………………………5 分

最终,我们得到仅当 $p\in(1,2)$时 $\int_1^{\infty} \sin\frac{\pi}{x}\frac{dx}{\ln^p x}$ 收敛。

2．计算摆线 $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\quad t\in[0,2\pi]$， 绕 x 轴旋转体的体积和表面积。

解：旋转体的体积

$$V=\int_0^{2\pi}\pi y^2dx=\int_0^{2\pi}\pi(1-\cos t)^3dt=\int_0^{2\pi}\pi(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=5\pi^2$$

……………………………………………………5 分

旋转体的表面积

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}y\sqrt{x'^2+y'^2}dt=2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}dt=8\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=\frac{64}{3}\pi$$

……………………………………………………5 分

3．求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ 的和。

解：记 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$， 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n}=S\left(-\frac{1}{2}\right)$，

$$\frac{S}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1},\qquad \int_0^x\frac{S}{x}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n,$$ ……………………………………3 分

$$\frac{1}{x}\int_0^x\frac{S}{x}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1},\qquad \int_0^x\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{S}{x}dx\right)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$ ……………3 分

故 $$\frac{1}{x}\int_0^x\frac{S}{x}dx=\frac{1}{(1-x)^2},\qquad \int_0^x\frac{S}{x}dx=\frac{x}{(1-x)^2},$$

$$\frac{S(x)}{x}=\frac{1+x}{(1-x)^3},\qquad S(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n}=S\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{27}$$ ……………………………………4 分

4．设 $f(x)\in C(0,+\infty)$， 且对任意 $x>0$ 满足 $x\int_0^1 f(tx)dt=-2\int_0^x f(t)dt+xf(x)+x^4$，

$f(1)=0$，求 $f(x)$。

解：令 $u=tx$，则原方程可化为 $\int_0^x f(u)du=-2\int_0^x f(t)dt+xf(x)+x^4$

两边求导得， $f(x)=-2f(x)+f(x)+xf'(x)+4x^3$，

从而得一阶线性 ODE， $f'(x)-\dfrac{2}{x}f(x)=-4x^2$， ……………………………………5 分

解得， $f(x)=x^2(C-4x)$ ，由于 $f(1)=0$，得 $C=4$

所以 $f(x)=x^2(4-4x)$。 ……………………………………5 分

三．证明题

1．（8 分）已知函数 $y=f(x)=x\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}$。求 $f(x)$ 的定义域，并证明

$y=f(x)$ 满足微分方程 $xy'-y=xe^x$，并且 $\lim_{x\to0^+}y(0)=0$。

证明： $x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}$ 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. ……………………………………2 分

以下证明 $f(x)$ 为所设初值问题的解。

$$y'=1+\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)\cdot(n+1)!}$$

$$\Rightarrow xy'=x+x\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}$$

$$\Rightarrow xy'-y=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}$$

$$=x+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=x+x\left((-1)+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=xe^x.$$ ……………4 分

$$\lim_{x\to0^+}y(x)=\lim_{x\to0^+}(x\ln x)+\lim_{x\to0^+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}=0$$ ……………2 分

2．（7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0,\ 0<f'(x)<1,\ \forall x\in[0,1]$，求证：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2>\int_0^1[f(x)]^3dx$$

证明：记$\varphi(x)=\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2-\int_0^x[f(t)]^3dt$

则 $\varphi'(x)=2f(x)\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\right]$……………2 分

记 $\psi(x)=\left[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\right]$

则 $\psi'(x)=2f(x)[1-f'(x)]$ ………………..……………2 分

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0,\ 0<f'(x)<1,\ \forall x\in[0,1]$，

$$f(x)>0,\quad 1-f'(x)>0,\quad \forall x\in[0,1]$$

故 $\psi(x)>0,\forall x\in[0,1]$，$\varphi'(x)>0,\forall x\in[0,1]$。又 $\varphi(0)=0$，所以

$$\varphi(x)=\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2-\int_0^x[f(t)]^3dt>0,\forall x\in(0,1]$$

$$\varphi(1)=\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^2-\int_0^1[f(t)]^3dt>0$$ ……………3 分

2.（备选）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且存在常数 $k>0$，使得

$$|f(x)|\le k\int_0^x f(t)dt$$

证明：在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)\equiv 0$。

证明：$f(0)=0$，且 $\forall x\in[0,+\infty),\ \int_0^x f(t)dt\ge 0$。

$$f(x)\le k\int_0^x f(t)dt$$

$$f(x)-k\int_0^x f(t)dt\le 0$$

$$e^{-kx}\left[f(x)-k\int_0^x f(t)dt\right]\le 0$$

$$\left[e^{-kx}\int_0^x f(t)dt\right]'\le 0$$

积分，$e^{-kx}\int_0^x f(t)dt\le 0,\ \forall x\in[0,+\infty)$，

$$\int_0^x f(t)dt\le 0,\ \forall x\in[0,+\infty)$$

于是$\int_0^x f(t)dt = 0, \forall x \in [0,+\infty)$，在$[0,+\infty)$上， $f(x) \equiv 0$。