# 清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A1　　A 卷　　2021 年 11 月 07 日 8:00-10:00

系名________ 班级________ 姓名________ 学号________

一、填空题（每个空 3 分，共 10 题）（请将答案直接填写在答题卡相应横线上！）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+n})=$________。

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=$________。

3. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=$________。

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{tx}-e^{-x}}{e^{tx}+e^{x}}$，则 $f(x)$ 间断点为________。

5. 已知 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-1}{\sin^2 x}=$________。

6. 设 $y=x\ln(1+x^2)$，则 $dy|_{x=1}=$________。

7. 曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(1,0)$ 点的切线方程为________。

8. 设 $f(x)$ 二阶可导，记 $f''(0)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}=$________。

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=$________。

10. 设 $n\geq 2$ 为正整数，$f(x)=x\ln x$，则 $f^{(n)}(1)=$________。

二、解答题（每题10分，共7题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0; \\ \sqrt{1+ax}, & x<0 \end{cases}$。

（I）求 $a$ 值，使得 $f(x)$ 为可导函数；

（II）此时 $f(x)$ 是否为二阶可导函数？写出理由。

12. 求 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{(x^x-e^e)^2}{e^x-x^e}$。

13. 设 $y=x+x^2+x^5$，其反函数 $x=x(y)$ 满足在 $x(0)=0$，求 $\dfrac{dx}{dy}(0)$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}(0)$。

14. 已知曳物线的参数方程为 $\begin{cases} x=a\left(\ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right)+\cos t\right), \\ y=a\sin t \end{cases}$，其中 $a>0$，$t\in[0,\pi]$。$P$ 为曳物线上一点，$L$ 为曳物线在 $P$ 的切线，记 $L$ 与 $x$ 轴的交点为 $Q$，求证线段 $PQ$ 长度为常数。

15. 求 $a,b$ 的值，使得函数 $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ 当 $x\to 0$ 时达到可能的最高阶无穷小量，并求此无穷小量的阶。

16.（I）设 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛；

（II）设 $y_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

17.（I）设 $f(x)$ 在 $x_0$ 点可导，令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(x_0+\dfrac{k}{n^2}\right)-nf(x_0)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}f'(x_0)$；

（II）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$。