

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$

类似:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n} \right)$

2. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  连续,  $f(1)=3$ , 且对所有  $x, y \in (0, +\infty)$

满足  $\int_1^{xy} f(x) dx = y \int_1^x f(x) dx + x \int_1^y f(x) dx$ , 求  $f(x)$ .

3. 对于  $x > 0$ , 证明  $f(x) = \int_0^x (t-t^2) \sin^{2n} t dt$  ( $n$  为自然数) 的最大值不超过  $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ .

类似: 证明  $\int_0^x (1-t) \ln(1+nt) dt$  在  $[0, +\infty)$  上最大值不超过  $\frac{1}{6}$ .

4. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明  $\int_0^1 \left[ \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t) dt \right] dx = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2) f(x) dx$ .

5. 设  $D$  是由圆弧  $y = \sqrt{1-x^2}$  与  $y = 1 - \sqrt{2x-x^2}$  围成的区域. 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周得到旋转体的体积和表面积.

6. 证明  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)} dx$ , 并求  $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)} dx$

7. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且单调增加, 证  $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$

8. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有二阶连续导数, 且  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$

证: 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使  $f''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3} \int_a^b f(x) dx$

9. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上导数存在, 且当  $0 < x < 1$  时,  $0 < f'(x) < 1$ ,  $f(0) = 0$

证明  $\left[ \int_0^1 f(x) dx \right]^2 > \int_0^1 [f(x)]^3 dx$