1、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

类似：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)$

2、设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，$f(1)=3$，且对所有 $x,y\in(0,+\infty)$

满足 $\int_1^{xy}f(x)dx=y\int_1^x f(x)dx+x\int_1^y f(x)dx$，求 $f(x)$.

3. 对于 $x>0$，证明 $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt$（$n$ 为自然数）的

最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

类似：证明 $\int_0^x(1-t)\ln(1+nt)dt$ 在 $[0,+\infty)$ 上最大值不超过 $\frac{n}{6}$.

4、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明 $\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(t)dt\right]dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)f(x)dx$

5、设 D 是由圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=1-\sqrt{2x-x^2}$ 围成的区域. 求 D 绕

x 轴旋转一周得到旋转体的体积和表面积.

6. 证明 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2x}{x(\pi-2x)}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2x}{x(\pi-2x)}dx$，并求 $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2x}{x(\pi-2x)}dx$

7、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证 $\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$

证：存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f''(\xi)=\frac{24}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)dx$

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导数存在，且当 $0<x<1$ 时，$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$

证明 $\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2>\int_0^1[f(x)]^3dx$

1. 解：由于 $\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1} < \frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} < \frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}$ $(i=2,3,\cdots,n)$

故 $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} < \sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_1^0 = \frac{2}{\pi}$ （此处注意不是 $\pi\int_0^1\sin x$）

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} = \frac{2}{\pi}$

由夹逼定理可得，$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right) = \frac{2}{\pi}$

2. 解：将y看成常量，等式两边同时对x求导，可得

$yf(xy) = yf(x) + \int_1^y f(x)dx$　　x,y相对独立，可对x,y求导

令x=1，可得 $yf(y) = yf(1) + \int_1^y f(x)dx = 3y + \int_1^y f(x)dx$

即 $\int_1^y f(x)dx = yf(y) - 3y$　由于f(x)连续，故 $\int_1^y f(x)dx$ 可导，则f(x)可导

两边对y求导，可得 $f(y) = f(y) + yf'(y) - 3$　即 $yf'(y) = 3$

两边积分可得 $f(y) = 3\ln y + C$　令y=1，得 $f(1) = C = 3$

故 $f(x) = 3(\ln x + 1)$.

3. 证明：即证 $\max_{0<x<+\infty} f(x) = f(x_0) \leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$　故找出最值，进行比较

法1：$f'(x) = (x-x^2)\sin^{2n}x = \begin{cases} >0, & 0<x<1 \\ =0, & x=1 \\ \leq 0, & x>1 \end{cases}$

可得f(x)最大值为 $\max_{0<x<+\infty} f(x) = f(1) = \int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt$

当 $0<t<1<\frac{\pi}{2}$ 时，$t-t^2>0$ 且 $0<\sin t<t$，$0<(t-t^2)\sin^{2n}t<(t-t^2)t^{2n}$

从而 $\max_{0<x<+\infty} f(x) = f(1) = \int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt < \int_0^1 (t-t^2)t^{2n}dt = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

法2. $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt+\int_1^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt$

由于当 $t\geq 1$ 时，$t-t^2\leq 0$，故 $\int_1^x (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt\leq 0$

故 $f(x)\leq\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt\leq\int_0^1(t-t^2)t^{2n}dt=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

类似：找出 $f(x)$ 最大值点 x_0，当 $t\geq 0$ 时，$\ln(1+nt)\leq nt$.

4. 证：$\int_0^1[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(t)dt]dx=x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(t)dt\Big|_0^1-\int_0^1 x\,d[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(t)dt]$

$=0-\int_0^1 x[f(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-f(x^2)\cdot 2x]dx$

$=\int_0^1 2x^2f(x^2)dx-\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{2}f(\sqrt{x})dx$　分别换元

$\int_0^1 2x^2f(x^2)dx\xlongequal{x^2=u}\int_0^1 2uf(u)\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}du$　　$\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{2}f(\sqrt{x})dx\xlongequal{\sqrt{x}=t}\int_0^1\frac{t}{2}f(t)\cdot 2t\,dt$

故上式 $=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)f(x)dx$　　分部积分

5. 解：设 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V，表面积为 S，

则 $V=\frac{2}{3}\pi-\int_0^1\pi[1-\sqrt{2x-x^2}]^2dx$

$=\frac{2}{3}\pi-\pi\int_0^1(1+2x-x^2-2\sqrt{2x-x^2})dx$

$=-\pi+\pi\int_0^1 2\sqrt{2x-x^2}\,dx=\frac{\pi^2}{2}-\pi$

$S=2\pi+\int_0^1 2\pi(1-\sqrt{2x-x^2})\sqrt{1+(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}})^2}\,dx$

$=2\pi+\int_0^1 2\pi(1-\sqrt{2x-x^2})\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

$=2\pi\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx=2\pi\arcsin(x-1)\Big|_0^1=\pi^2$

另解：D 的面积为 $2\times(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}-1$，形心为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，故 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $(\frac{\pi}{2}-1)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{2}-\pi$

6. 证：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{(\frac{\pi}{2}-t)\cdot 2t}(-dt)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{(2t-\pi)t}dt$

所以 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}dx$

从而 $I=\frac{1}{2}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}dx\right]$

$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x}\right)dx$

$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{x}{\pi-2x}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\ln 2}{\pi}$

7. 证明：利用变上限积分函数，单调性

令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

故 $F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}f(x)$

$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]dt$

又因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增，故 $F'(x)\geq 0$，即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增

又 $F(a)=0$，$F(b)\geq F(a)$，即 $\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

法2. 利用定积分的性质和单调性

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，故 $(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]\geq 0$

从而 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]dx\geq 0$

又 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx=0$，从而 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2})dx=0$

于是 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\geq 0$，即证

法3：利用积分中值定理

$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx$

$= f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})dx + f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-\frac{a+b}{2})dx$

其中 $a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，$\xi_1>\xi_2$，故 $f(\xi_1)\geq f(\xi_2)$

而 $\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-\frac{a+b}{2})dx = \frac{1}{8}(b-a)^2$

故 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx = \frac{1}{8}[f(\xi_1)-f(\xi_2)](b-a)^2 \geq 0$ 得证

8. 证：$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2}f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2$

从而 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2 dx$

$= f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2 dx$

记 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则

$m(x-\frac{a+b}{2})^2 \leq f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2 \leq M(x-\frac{a+b}{2})^2$

所以 $m \leq \dfrac{\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2 dx}{\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 dx} = \dfrac{\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2 dx}{\frac{1}{12}(b-a)^3} \leq M$

故存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi) = \dfrac{\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2 dx}{\frac{1}{12}(b-a)^3}$ 得证

注意，此题不能错误利用积分中值定理.

9. 证：令 $F(x) = [\int_0^x f(t)dt]^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且

$F'(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)dt - [f(x)]^3 = f(x)[2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)]$

记 $g(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)$，则 $g'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)[1-f'(x)] > 0$

且 $g(0)=0$，故 $g(x)>g(0)=0\ (x>0)$，从而 $F'(x)>0$ $f(x)>0$，$f(x)$ 单增

又 $F(0)=0$，故 $F(x)>0\ (x>0)$，特别地有 $F(1)>0$，即证