微积分

1、当$x\neq0$时，设$f(x)=\frac{(x^2-1)\sin x}{x(x^2+1)}$，$g(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，下列命题正确的是（ ）

①对任意$X>0$，在$0<|x|<X$上$f(x)$有界，但在$(-\infty,+\infty)$ $(x\neq0)$上$f(x)$无界

②在$(-\infty,+\infty)$ $(x\neq0)$上$f(x)$有界

③$g(x)$在$x=0$的去心邻域内无界，但$\lim\limits_{x\to0}g(x)\neq\infty$　　④$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\infty$.

2. 设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ $(n=1,2,\cdots)$

证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3. 设$g(x)$在$x=0$处存在二阶导数，且$g(0)=1$，$g'(0)=2$，$g''(0)=1$.

设$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-e^{2x}}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$　求$f'(0)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

4、设$f(0)=0$，则$f(x)$在点$x=0$可导的充要条件为（ ）

A $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}$存在　B. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}$存在　C. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}$存在　D. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}$存在

5、设$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$，求$f(x)$并讨论$f(x)$的连续性与可导性.

6、设$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$

证明$\{x_n\}$极限存在并求此极限.

类似：设$x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$\cdots$，$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，$\cdots$ $(a>0)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7、求$r=1+\cos\theta$在点$(\frac{\pi}{2},1)$处的切线方程

8. 设$y=\frac{1}{x^2-1}$，求$y^{(100)}$.

9. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$

证：① 存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使$f(\eta)=\eta$　② 对任意实数λ，必存在$\xi\in(0,\eta)$，

使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

10. 设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且满足$|f(x)|\le a$，$|f''(x)|\le b$，其中a,b都是非负常数，c是$(0,1)$内任一点，证明$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$

11. 设$y=f(x)$在$(-1,1)$内有二阶连续导数且$f''(x)\ne 0$. 证明

① 对于$(-1,1)$内的任一$x\ne 0$，存在唯一$\theta(x)\in(0,1)$，使$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$成立

② $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$

12. 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且$|f''(x)|\le M$.

求证：$\forall x\in[0,1]$，$|f'(x)|\le\frac{M}{2}$.

13. 设函数$y=f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$

求证：$\exists\,\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)\ge 8$.

14. 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且$|f''(x)|\le 2$，证$|f'(x)|\le 1$.

第一章　函数、极限、连续

函数定义、极限定义

函数的单调性（严格定义）、奇偶性、周期性、有界性.

关于有界、无界的充分条件

① 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在则存在 $\delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，$f(x)$ 有界.　$x\to x_0^+$，$x\to x_0$ 也类似.

② 当 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 有界.　$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 有类似结论.

③ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

④ 设 $f(x)$ 在数集 U 上有最大值（最小值），则 $f(x)$ 在 U 上有上（下）界.

⑤ 有界函数与有界函数之和、之积均为有界函数.

$\boxed{\text{以上均为充分条件，其逆均不成立.}}$

例1. 当 $x\neq0$ 时，设 $f(x)=\dfrac{(x^2-1)\sin x}{(x^2+1)x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$. 下述命题正确的是（② ③）

① 对任意 $X>0$，在 $0<|x|<X$ 上 $f(x)$ 有界，但在 $(-\infty,+\infty)$ $(x\neq0)$ 上 $f(x)$ 无界.

② 在 $(-\infty,+\infty)$ $(x\neq0)$ 上 $f(x)$ 有界

③ $g(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界，但 $\lim\limits_{x\to0} g(x)\neq\infty$　　④ $\lim\limits_{x\to0} g(x)=\infty$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-1$，所以存在 $\delta>0$，在 $0<|x|<\delta$ 上 $f(x)$ 有界. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)x}=1$

故存在 $X>0$，在 $|x|>X$ 上 $\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)x}$ 有界. 而 $\sin x$ 是有界的，所以在 $|x|>X$ 上 $f(x)$ 有界.

而在区间 $[-X,-\delta]$，$[\delta,X]$ 上 $f(x)$ 是连续的，所以是有界的，于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

对于任给的 $M>0$，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$g(x_n)=(2n\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，

当 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$ 时，$g(x_n)>M$. 即对任给的 $M>0$，存在 x_n，其中 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$

（这样的 n 总是存在），使 $g(x_n)>M$. 说明 $g(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界. 但另一方面

若取 $x_n'=\dfrac{1}{2n\pi}$，则有 $g(x_n')=0$. 此说明 $\lim\limits_{x\to0} g(x)\neq\infty$.

利用导数也可讨论函数的有界（无界）问题.

微积分

例1 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$ 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

证：由 $0<x_1<3$ 可知 $x_1>0, 3-x_1>0$ $\quad 0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\le\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}$.

设 $0<x_k\le\frac{3}{2}$ $(k>1)$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\le\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2}$

由数学归纳法知，对任意正数 $n>1$，均有 $0<x_n\le\frac{3}{2}$，因而数列 $\{x_n\}$ 有界.

又当 $n>1$ 时，$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\ge 0$

因而 $x_{n+1}\ge x_n$ $(n>1)$ 即数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

由单调有界数列必有极限可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限

得 $a=\sqrt{a(3-a)}$ 解得 $a=\frac{3}{2}$，$a=0$（舍去）. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

思路 总结：利用数列的单调有界准则，先判定极限存在性，求出数列极限. 归纳法证明

例2 若 $a>0, b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ____.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{a^x+b^x-2}{x}=\frac{3}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{3}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln b}{x}\right)=\frac{3}{2}\ln(ab)$

$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$ $\qquad$ 原式 $=e^{\ln(ab)^{\frac{3}{2}}}=(ab)^{\frac{3}{2}}$

1^∞ 型极限是经常考的热点，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 推广 $\lim\limits_{u(x)\to 0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$ 及 $\lim\limits_{u(x)\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e$

例3. 设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}$ $x\in[\frac{1}{2},1)$ 试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续.

解：由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{(1-x)\sin\pi x}$

$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-\pi-\pi\cos\pi x}{-\sin\pi x+(1-x)\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\pi^2\sin\pi x}{-\pi\cos\pi x-\pi\cos\pi x-(1-x)\pi^2\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}$

由于 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1)$ 上连续，因而定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$，使 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续.

例3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)=1$

有界

无穷小量

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\sin\frac{1}{x}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$

应用洛必达法则 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\cos\frac{1}{x}\right)$ 原极限不存在

洛必达并非万能！

例4. 设 $x_1=\sqrt{a}$, $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$, …, $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$, … $(a>0)$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解：该数列为正项数列，由 $x_1^2=a<a+\sqrt{a}=x_2^2$，知 $x_1<x_2$，由此可假定 $x_{k-1}<x_k$，则 $x_k=\sqrt{a+x_{k-1}}<\sqrt{a+x_k}=x_{k+1}$，由归纳法可知 $\{x_n\}$ 为单调递增数列。又由 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ 两边平方后，得 $x_n^2=a+x_{n-1}$，$x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}<\frac{a}{x_1}+1=\sqrt{a}+1$，即 $\{x_n\}$ 有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，对 $x_n^2=a+x_{n-1}$ 两边取极限，则 $b^2=a+b$，由 $b\ge 0$，故 $b=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

例5 Taylor公式 求下列极限.

① $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$ ② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$ ③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

解：① $\sqrt[3]{x^3+3x^2}=x(1+\frac{3}{x})^{\frac{1}{3}}=x[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+\frac{\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})}{2}(\frac{3}{x})^2]=x[1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}]\approx x+1$

$\sqrt[4]{x^4-2x^2}=x(1-\frac{2}{x})^{\frac{1}{4}}=x[1+\frac{1}{4}(-\frac{2}{x})+\frac{\frac{1}{4}\cdot(-\frac{3}{4})}{2}(-\frac{2}{x})^2]=x[1-\frac{1}{2x}-\frac{3}{8x^2}]\approx x-\frac{1}{2}$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+1)-(x-\frac{1}{2})]=\frac{3}{2}$

② $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$, $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}$, $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}]}{x^2[\cancel{x}-\cancel{x}-(\frac{x^2}{2})-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}]}=\frac{1}{6}$

③ $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4$. $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2$, $e^{x^2}=1+x^2$, $\sin x^2=x^2$.

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=-\frac{1}{12}$

例6. 设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f'(x)\ge k>0$, $f(0)<0$.
证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

证法1：在 $[0,+\infty)$ 上，由 $f'(x)\ge k$，得 $\int_0^x f'(t)dt\ge\int_0^x k\,dt$，即 $f(x)\ge kx+f(0)$. 取 $x_1>-\frac{f(0)}{k}>0$
有 $f(x_1)>k(-\frac{f(0)}{k})+f(0)=0$，因 $f(x_1)>0$，由题设 $f(0)<0$，则 $\exists x_0\in(0,x_1)$，使 $f(x_0)=0$
又 $f'(x)\ge k>0$. 故 $f(x)$ 严格单调递增，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

证法2：关键是在 $(0,+\infty)$ 上找点使 $f(x_1)>0$. 由题设 $f'(x)\ge k$ 可知，曲线 $y=f(x)$ 应在直线 $y=kx+f(0)$ 上方，又要求出 $y=kx+f(0)$ 与x轴的交点 $x_1=-\frac{f(0)}{k}$，则必有 $f(x_1)\ge 0$
事实上，$f(x_1)-f(0)=f(-\frac{f(0)}{k})-f(0)=f'(\xi)(-\frac{f(0)}{k})\ge k(-\frac{f(0)}{k})=-f(0)$
则 $f(x_1)\ge 0$. 若 $f(x_1)=0$，则 x_1 即为 $f(x)$ 的零点. 若 $f(x_1)>0$，由介值定理 $\exists x_0\in(0,x_1)$，使 $f(x_0)=0$. 唯一性

例1. 设$g(x)$在$x=0$处存在二阶导数，且$g(0)=1$, $g'(0)=2$, $g''(0)=1$.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 求$f'(0)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性

解：当$x\neq 0$时，有 $f'(x)=\dfrac{x(g'(x)-2e^{2x})-(g(x)-e^{2x})}{x^2}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x^2}$ $(\frac{0}{0}型)$ $\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-2e^{2x}}{2x}$

因为$g'(x)$在$x=0$处连续，故$\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=g'(0)=2$. 但题目未设在$x=0$的某邻域当$x\neq 0$时$g''(x)$存在，故不可用洛必达. 应凑成导数形式求极限.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-2e^{2x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}-\frac{2e^{2x}-2}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}-\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{2}=\frac{1}{2}g''(0)-2=-\frac{3}{2}$$

则 $$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(g'(x)-2e^{2x})-(g(x)-e^{2x})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g'(x)-g'(0)}{x}-\frac{2e^{2x}-2}{x}-\frac{g(x)-e^{2x}}{x^2}\right)$$

$$=g''(0)-4-\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}=f'(0)$$

所以$f'(x)$在$x=0$处连续.

对于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$的"$\frac{0}{0}$"型，如果条件仅设$f'(x_0)$与$g'(x_0)$存在，而未设$x=x_0$的去心邻域内$f'(x)$与$g'(x)$存在，则不能用洛必达，而要凑成导数形式.

单调有界

1、设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ $(n=1,2,\cdots)$，证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解：由题意知 $x_{n+1}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}$．首先证明$\{x_n\}$的有界性.

证 $x_n>0$：当$n=1$时，$x_1>0$，设$n=k$时，$x_k>0$，则 $x_{k+1}=\ln\dfrac{e^{x_k}-1}{x_k}$，其中 $e^{x_k}-1>x_k$

可知 $x_{k+1}>\ln 1=0$，因此对于任意的n，有$x_n>0$. 再证$\{x_n\}$的单调性.

由于 $e^{x_{n+1}}-e^{x_n}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-e^{x_n}=\dfrac{e^{x_n}-1-x_ne^{x_n}}{x_n}$

令$f(x)=e^x-1-xe^x$，则$f'(x)=-xe^x<0$，$f(x)$单减，故$x>0$时，$f(x)<f(0)=0$.

从而$e^{x_{n+1}}-e^{x_n}<0$，$x_{n+1}-x_n<0$ 可知$\{x_n\}$单减.

综上，$\{x_n\}$为单调递减有下界的数列，可知$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$两边同时令$n\to\infty$，得$ae^a=e^a-1$，解得$a=0$

另解：由Taylor公式可知，$e^x=1+x+\frac{1}{2}\xi^2$，其中ξ介于0与x之间，从而可知$e^x-1\geq x$.

$x_{n+1}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}\geq 0$，从而数列$\{x_n\}$有下界.

另一方面，由Lagrange中值定理可知，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1=e^{x_n}-e^0=x_ne^{\xi_n}$，其中$0<\xi_n<x_n$

从而$x_{n+1}=\xi_n<x_n$，则数列$\{x_n\}$单调递减. 单调有界收敛原理.

2. 证明：对任意的正整数n，都有$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$成立.

② 设$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ $(n=1,2,\cdots)$，证明$\{a_n\}$收敛.

证：① 由Lagrange中值定理知，存在$\xi\in(n,n+1)$，使得$\ln(\frac{1}{n}+1)=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi}$

则 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$

② 由①知，当$n\geq 1$时，$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$ 即$\{a_n\}$单减

又$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$

$=\ln 2+(\ln\frac{3}{2}-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0$

故$\{a_n\}$有下界，故数列收敛.

极限重要定理

1、极限存在的充要条件 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

2. 数列极限存在的充要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n-1}=A$

3. 若 $\lim\limits_{x\to *} f(x)$ 存在，则此极限必唯一. 唯一性. $*$ 指 $x_0, x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty, \infty$

4. 保号性 设 $\lim\limits_{x\to *} f(x)=A$，$A\neq 0$，则存在 $*$ 的一个去心邻域，在此邻域内 $f(x)$ 与 A 同号

推论 设存在 $*$ 的一个去心邻域，在此邻域内 $f(x)\geq 0$（或 ≤ 0），且 $\lim\limits_{x\to *} f(x)$ 存在且等于 A，则 $A\geq 0$（≤ 0）.

两个重要法则

一、夹逼定理 设在 x_0 的去心邻域内 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

注：夹逼定理对于数列也成立；A 换为 $+\infty$ 或 $-\infty$，定理也成立.

二、单调有界 设数列 $\{u_n\}$ 单调增加（减少）且有上（下）界 $M(m)$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在且 $\leq M$（$\geq m$）.

几个重要无穷小

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 推广 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$，其中 $\varphi(x)\neq 0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$，其中 $\varphi(x)\neq 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\delta}(\ln x)^k=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^k e^{-\delta x}=0\ (\delta>0, k>0)$

4. $x\to 0$，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x$，$x\sim e^x-1$，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$(1+x)^a-1\sim ax$，$a^x-1\sim x\ln a\ (a>0$，且 $a\neq 1)$ $x^m+x^k\sim x^m$（常数 $k>m>0$）

注意 整个式子中的乘除因子可用等价无穷小替换求极限，加减时不能用等价无穷小替换，部分式子的乘除因子也不能用等价无穷小替换.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\frac{x}{x^2}\right)\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}-\frac{x}{x^2}\right)=0$$

$*$ 这一步不可用 $\ln(1+x)\sim x$ 去替换. 不是整个式子的乘除法，因此不能替换.

一、求函数的极限

主要是七种待定型 $\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，1^∞型，0^0型，∞^0型.

方法如下：①初等数学中的恒等变形，能约分则约分，能化简则必简.

②等价无穷小替换

③洛必达法则（并非万能，可能失效）

④带皮亚诺余项的Taylor公式

⑤夹逼定理、重要极限、单调有界

⑥导数定义、积分定义.

例1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

等价无穷小

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{洛}{=}e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\dfrac{e}{2}$

例2 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续，$f(0)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=$____.

解：$\int_0^x(x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

$\int_0^x f(x-t)dt\overset{x-t=u}{=}\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du=\int_0^x f(t)dt$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}$

"$\frac{0}{0}$"型，但不可用洛必达法则. 由于$f(x)$在$x=0$的去心邻域内未设可导，不满足(2).

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt+f(x)}=\dfrac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\dfrac{1}{2}$　　由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1}=f(0)$.

例3 $\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2+2x+\sin x}+(x+2)]=$____.

解：原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{[\sqrt{x^2+2x+\sin x}+(x+2)][\sqrt{x^2+2x+\sin x}-(x+2)]}{\sqrt{x^2+2x+\sin x}-(x+2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x-2x-4}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}}-x(1+\frac{2}{x})}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-2-\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}}-(1+\frac{2}{x})}=1$.

第二章 一元函数微分学

导数定义：设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并设 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，并称上述极限为

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$

若记 $x=x_0+\Delta x$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

定义中必须有 $f(x_0)$，且其中的 $f(x)$ 是 x_0 附近的 x 处的函数值.

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}$ 不对. 设 $u=(\Delta x)^2$，由 $\lim\limits_{(\Delta x)^2\to 0}\dfrac{f(x_0+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{(\Delta x)^2}$ 存在

只能推出右导数 $f'_+(x_0)$ 存在，推不出 $f'(x_0)$ 存在.

性质

1. 设 $f(x)$ 在 x 处可导，则 $f(x)$ 在同一点处必连续，反之不成立. 连续是可导前提.
2. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右导数 $f'_-(x_0)$、$f'_+(x_0)$ 都存在

   并且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$
3. 可导必可微 $dy=f'(x_0)dx$

常用公式导数必须熟记.

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)dt\right]'=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$$

莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$

$(e^{ax})^{(n)}=a^ne^{ax}$ $\quad(\sin ax)^{(n)}=a^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+ax\right)$ $\quad(\cos ax)^{(n)}=a^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}+ax\right)$

$(\ln(1+x))^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\quad((1+x)^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

4. 参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $x'(t)\neq 0$，则 $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$，$y''_{xx}=\dfrac{x'_ty''_{tt}-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}$
5. 隐函数求导. $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导，含有 $\frac{dy}{dx}$ 式子，可解出 $\frac{dy}{dx}$.
6. 幂函数 $[u(x)^{v(x)}]'_x=u(x)^{v(x)}\left[\dfrac{v(x)}{u(x)}u'(x)+\ln u(x)\cdot v'(x)\right]$ $\quad e^{v(x)\ln u(x)}$
7. 反函数 设 $y=f(x)$ 可导且 $f'(x)\neq 0$，存在反函数 $x=\varphi(y)$，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$，$\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

   且存在二阶导数，则 $\varphi''(y)=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$.

2. 导数与微分

1. 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（B） 导数定义

A. $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在 B. $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在 C. $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在 D. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

解：若 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{h}\xlongequal{1-e^h\triangleq t}\lim\limits_{h\to0}\frac{f(t)-f(0)}{\ln(1-t)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{t}{\ln(1-t)}$

由于 $\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\ln(1-t)}$ 存在且不为0，则 $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}$ 存在，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导。反应也成立。

法2 排除法

A 反例. 取 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geq0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{1}{2}h^2}{h^2}=\frac{1}{2}$ 存在

但 $f(x)$ 显然在 $x=0$ 处不可导，因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左导数不存在。

C 反例. 取 $f(x)=x^{2/3}$ 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数不存在，但 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{(h-\sin h)^{2/3}}{h^2}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left(\frac{1-\cos h}{3h^2}\right)^{2/3}=\lim\limits_{h\to0}\left(\frac{\frac{1}{2}h^2}{3h^2}\right)^{2/3}=\left(\frac{1}{6}\right)^{2/3}$ 存在.

D 反例 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq0\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，但 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim\limits_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$ 存在

深刻理解导数定义 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续，而且 $f(x)$ 在点 x_0 可导

$f(x)$ 在点 x_0 左右导数存在且相等. 分段函数分段点处的可导性的判定方法.

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$ 求 $f(x)$ 并讨论 $f(x)$ ~~的连续性~~与可导性. 求出 $f(x)$ 解析式再讨论.

解：当 $x>1$ 时，$e^{n(x-1)}>e^n$，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^2+\frac{ax+b}{e^{n(x-1)}}}{1+\frac{1}{e^{n(x-1)}}}=x^2$，当 $x=1$ 时，$f(x)=\frac{a+b+1}{2}$，当 $x<1$ 时，$f(x)=ax+b$

即 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1\\ \frac{a+b+1}{2}, & x=1\\ ax+b, & x<1\end{cases}$ 仅当 $f_-(1)=f_+(1)=f(1)$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 连续定义

即 $a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1)$

因此，当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续；显然 $f(x)$ 在 $x\neq1$ 处也连续，故当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

当 $f_-'(1)=f_+'(1)$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可微，又注意到可微必连续，于是

$f_-'(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a$ $\qquad f_+'(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

故仅当 $a=2, b=-1$ 时，$f_-'(1)=f_+'(1)$，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，显然在 $x\neq1$ 处 $f(x)$ 也可导.

① 函数可导必连续，函数在一点连续的充要条件是其在该点处的左、右极限存在且等于该点函数值.

② 函数在一点可导的充要条件是其在该点处的左、右导数均存在且相等.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$　　分段函数求导.

解：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$

$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

4. 设 $y=\frac{1}{x^2-1}$，求 $y^{(100)}$　　$y^{(n)}$　　高阶导数关键是求规律.　　适当恒等变形，以便发现规律.

解：由 $y=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}[(x-1)^{-1}-(x+1)^{-1}]$.

故 $y'=\frac{1}{2}[(-1)(x-1)^{-2}-(-1)(x+1)^{-2}]=\frac{1}{2}(-1)[(x-1)^{-2}-(x+1)^{-2}]$

$y''=\frac{1}{2}(-1)(-2)[(x-1)^{-3}-(x+1)^{-3}]$

$\vdots$

$y^{(n)}=\frac{1}{2}(-1)(-2)\cdots(-n)[(x-1)^{-(n+1)}-(x+1)^{-(n+1)}]=\frac{n!}{2}(-1)^n[(x-1)^{-(n+1)}-(x+1)^{-(n+1)}]$

$y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$y''=\frac{-2(x^2-1)^2-(-2x)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$

n阶函数导数，先求出1、2阶导数（最多3阶），再归纳出n阶导数形式.

5. 求 $r=1+\cos\theta$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1)$ 处的切线方程　　极坐标转化为参数方程求解.

解：由直角坐标与极坐标关系可知 $x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta$

$y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0$，$y=1$，且 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{y'_\theta}{x'_\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{-\sin\theta-\sin 2\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=1$

故所求切线方程为 $y-1=1(x-0)$，即 $x-y+1=0$.

6. 求下列函数的1阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及2阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

① $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$　　② $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$

解：① $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta.$

② $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}=\frac{1}{t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}=-\frac{1+t^2}{t^3}$

洛必达法则

某些重要、步骤繁简法的证明需要考生掌握. 如法则1

法则1　设 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$　　(2) $f(x)$与$g(x)$在x_0的去心邻域内可导,且$g'(x)\neq$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

注意: $\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型才可用洛必达, 做的过程随时化简, 用等价无穷小替代.

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在, 并不说明原极限不存在, 此时失效. 尤其适用于变限积分的函数

Taylor公式

设$f(x)$在$x=x_0$处存在n阶导数, 则有$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$

$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$　其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}=0$.

在$x=x_0$处展开的具有皮亚诺余项的n阶Taylor公式. $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 皮亚诺

① $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$　② $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$

③ $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$　④ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

⑤ $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

利用积分和式求极限.

设$f(x)$在$[0,1]$上连续, $u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$ 或 $u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\frac{i}{n})$, 则

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\frac{i}{n})$) $=\int_0^1 f(x)dx$.

本节是考研热点. 主要有: 求极限 (已知某极限求另一极限, 求其中参数等), 无穷小的比较及无穷小的阶, 求数列的极限, 利用积分和式求极限, 利用夹逼定理求极限, 利用单调有界定理证明极限的存在性.

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$　　$\frac{2}{\pi}$

类似 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$　　$2(2\ln2-1)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, $p>0$　　$\frac{1}{p+1}$

3. 中值定理

Rolle定值　拉格朗日中值定理　柯西中值　泰勒公式

1、设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，且$f''(x)\geq 0$. 证明对于(a,b)内任意两点x_1、x_2及$0\leq t\leq 1$，

有$f[(1-t)x_1+tx_2]\leq f(x_1)(1-t)+tf(x_2)$

证：由对称性，不妨设$x_1<x_2$，当$0\leq t\leq 1$时，有$x_1\leq(1-t)x_1+tx_2\leq x_2$.

由中值定理得，存在η_1，$x_1<\eta_1<(1-t)x_1+tx_2$，使

$$f[(1-t)x_1+tx_2]-f(x_1)=f'(\eta_1)[(1-t)x_1+tx_2-x_1]=f'(\eta_1)t(x_2-x_1)$$

存在η_2，$(1-t)x_1+tx_2<\eta_2<x_2$，使$f(x_2)-f[(1-t)x_1+tx_2]=f'(\eta_2)\{x_2-[(1-t)x_1+tx_2]\}$

$$=(1-t)(x_2-x_1)f'(\eta_2)$$

而$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)-f[(1-t)x_1+tx_2]$

$$=t\{f(x_2)-f[(1-t)x_1+tx_2]\}-(1-t)\{f[(1-t)x_1+tx_2]-f(x_1)\}$$

$$=t(1-t)(x_2-x_1)[f'(\eta_2)-f'(\eta_1)]=t(1-t)(x_2-x_1)f''(\xi)(\eta_2-\eta_1)\geq 0\quad(\eta_1<\xi<\eta_2)$$

故$f[(1-t)x_1+tx_2]\leq(1-t)f(x_1)+f(x_2)t$　　涉及到两个参数

2、设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$

证：①存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使$f(\eta)=\eta$.　②对任意实数λ，必存在$\xi\in(0,\eta)$，使$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=$

证：①的证明利用闭区间上连续函数介值定理　②构造辅助函数，考虑与$\varphi(x)$有关.

(1) 令$\varphi(x)=f(x)-x$，则$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，又$\varphi(1)=-1<0$，$\varphi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$. 由介值定理可知

存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使$\varphi(\eta)=f(\eta)-\eta=0$ 即$f(\eta)=\eta$.

(2) 要证$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$，即证$f'(\xi)-1-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$. 即要证$\varphi'(\xi)-\lambda\varphi(\xi)=0$

构造辅助函数$F(x)=e^{-\lambda x}\varphi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$.　原函数如何构造. 常与$e^x$相联.

则$F(x)$在$[0,\eta]$上满足Rolle定理条件. 故存在$\xi\in(0,\eta)$，使得$F'(\xi)=0$.

即$e^{-\lambda\xi}[\varphi'(\xi)-\lambda\varphi(\xi)]=0$　而$e^{-\lambda\xi}\neq 0$. 从而有$\varphi'(\xi)-\lambda\varphi(\xi)=0$. 即$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=$

3. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$. 试证　存在性，唯一性

①对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$，存在唯一 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立

② $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.　拉格朗日中值定理，泰勒公式

证：① 任给非零 $x\in(-1,1)$，由拉式中值定理得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\ (0<\theta(x)<1)$.

由于 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq 0$，所以在 $(-1,1)$ 内不变号.　证到此并未完成

不妨设 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调递增，故 $\theta(x)$ 唯一.

② 由泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi$ 在 0 与 x 之间.

故 $xf'(\theta(x)x)=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$　从而 $\theta(x)\dfrac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x\theta(x)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x\theta(x)}=f''(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0}f''(\xi)=\lim\limits_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0)\neq 0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

方法2　对 $x\in(-1,1)$ 且 $x\neq 0$，$\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{x}=f''(0)$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

Taylor公式　①展开到第n阶，对余项而言，极限用皮亚诺，剩余拉格朗日.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足 $|f(x)|\leq a$，$|f''(x)|\leq b$. 其中 a,b 都是非负常数

c 是 $(0,1)$ 内任一点，证明 $|f'(c)|\leq 2a+\frac{b}{2}$.　在哪一点展开至关重要.

证　$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)(x-c)^2}{2!}$，其中 $\xi=c+\theta(x-c)$，$0<\theta<1$. 在上式中分别令 $x=0$，$x=1$

$f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}c^2$，$0<\xi_1<c<1$　端点，中点，极值点.

$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2$，$0<c<\xi_2<1$　任意一点.

两式相减得 $f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]$

于是 $|f'(c)|\leq|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2\leq a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]$

由于 $c\in(0,1)$，$(1-c)^2+c^2\leq 1$，故 $|f'(c)|\leq 2a+\frac{b}{2}$.

一类特殊题目　Taylor公式在微分、积分中的应用　P46 11

1、设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且 $|f''(x)|\le M$，$\forall x\in[0,1]$，求证：$|f'(x)|\le \frac{M}{2}$

证明：由Taylor展开可得 $f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2$　$(\xi_1\in(0,x))$

两式相减，且 $f(0)=f(1)$　$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$　$(\xi_2\in(x,1))$

可得　$0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\cdot(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$　　$f'(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$

$|f'(x)|\le|f''(\xi_1)|\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-x)^2\le M(x^2+(1-x)^2)\le\frac{M}{2}$.

2、设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$（且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 -1），求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\ge 8$.　最值点展开　（最小值点）

证明：设 $f(x)$ 在 $x=a$ 取得最小值，$f(a)=-1$，$f'(a)=0$，$0<a<1$

在 $x=a$ 处 Taylor展开得　$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2$

分别令 $x=0,1$，得 $f(0)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_1)a^2$　$f''(\xi_1)=\frac{2}{a^2}$　　$\xi_1\in(0,a)$

$0=f(1)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-a)^2$，$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-a)^2}$　$\xi_2\in(a,1)$

记 $f''(\xi)=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$，则 $f''(\xi)\ge\frac{2}{a^2}$，且 $f''(\xi)\ge\frac{2}{(1-a)^2}$　$\therefore f''(\xi)\ge\max\{\frac{2}{a^2},\frac{2}{(1-a)^2}\}$

当 $0<a\le\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi)=f''(\xi_1)=\frac{2}{a^2}\ge8$，当 $\frac{1}{2}\le a<1$ 时，$f''(\xi)=f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-a)^2}\ge8$.

3、设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且 $|f''(x)|\le2$，试证 $|f'(x)|\le1$.（在 $x=0$ 和 $x=1$ 用Taylor

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

证明含定积分的不等式，常利用函数的单调性或定积分的不等式性质
将不等式移项或适当变形后，作由变上限积分表示的辅助函数，通过其导数得其单调性，
后者利用被积函数满足的不等式，两边积分可得证.

证1 单调性．令 $F(t)=\int_a^t xf(x)dx-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)dx$，$t\in[a,b]$

则 $F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^t[f(t)-f(x)]dx$

因 $f(x)$ 单调增加，$x\in[a,t]$，故 $f(t)-f(x)\ge0$．由上式得 $F'(t)\ge0$．即 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加

从而 $F(b)\ge F(a)=0$．得证

↗斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

证2（定积分比较性质）．因 $f(x)$ 单调增加，故 $(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]\ge0$

两端在 $[a,b]$ 上积分，得 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]dx\ge0$

由于 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2})dx=f(\frac{a+b}{2})(\frac{x^2}{2}-\frac{a+b}{2}x)\Big|_a^b=0$

故　$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\ge0$　　移项得证

5. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)\,dx$ $(k>1)$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

证 由 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx$ 及积分中值定理知，至少存在一点 $\xi_1\in[0,\frac{1}{k}]\subset[0,1)$

使得 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx=\xi_1e^{1-\xi_1}f(\xi_1)$

在$[\xi_1,1]$上，令 $\varphi(x)=xe^{1-x}f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在$[\xi_1,1]$上连续，在$(\xi_1,1)$内可导．且 $\varphi(\xi_1)=\varphi(1)=f(1)$

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使 $\varphi'(\xi)=e^{1-\xi}[f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0$ 得证

6. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$ （P141 7.(1)） 积分第一中值定理 $\exists\xi\in[a,b]$ 闭区间

错误解法：积用分中值定理，有 $\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{\xi^n}{1+\xi}$ 由于$0<\xi<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{1+\xi}=0$

原因：ξ应写作$0\leq\xi\leq1$，如果不能排除$\xi=1$的情况，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{1+\xi}=0$ 就不成立．

其次，积分中值定理只肯定ξ的存在，并未说明ξ在区间的何处．一般来说，ξ依赖于被积函数和积分区间，当n不同时，被积函数不同，从而ξ在$[0,1]$的位置也不同．记为ξ_n．

$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{(\xi_n)^n}{1+\xi_n}$ $n\to\infty$时，$\xi_n\to1$，则极根不为0．

证1．由于 $0<\frac{x^n}{1+x}<x^n$．得 $0<\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx<\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$ 由夹逼定理得证

证2 利用推广的积分中值定理 $\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\underbrace{\frac{1}{1+\xi_n}}_{f(x)}\underbrace{\int_0^1x^n}_{g(x)\text{不变号}}dx=\frac{1}{(1+\xi_n)(n+1)}$ $(0\leq\xi_n\leq1)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\xi_n)(1+n)}=0$

7. 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续导函数，$f(a)=0$．试证 $\int_a^b|f(x)|dx\leq\frac{M}{2}(b-a)^2$，$M=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f'(x)|$

证法1 拉格朗日 即 $f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$ $(a<\xi<x)$

$|f(x)|=|f'(\xi)|(x-a)\leq\max\limits_{a\leq x\leq b}|f'(x)|(x-a)=M(x-a)$ 则 $\int_a^b|f(x)|dx\leq M\int_a^b(x-a)dx=\frac{M}{2}(b-a)^2$

法2．牛-莱公式 $f(x)=\int_a^xf'(x)dx$ $|f(x)|=|\int_a^xf'(x)dx|\leq\int_a^x|f'(x)|dx\leq M(x-a)$ 得证

类似 设$f(x)$在$[a,b]$有连续导数，且$f(a)=f(b)=0$ $|\int_a^bf(x)dx|\leq\frac{M}{4}(b-a)^2$，$M=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)$

法1．拉格 $f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)$ $\xi_1\in(a,x)$ $f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)$，$\xi_2\in(x,b)$

$|f(x)|\leq M(x-a)$，$|f(x)|\leq M(b-x)$ $|\int_a^bf(x)dx|\leq\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx$

$\leq\int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^bM(b-x)dx=\frac{M}{2}\left[(x-a)^2\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}-(b-x)^2\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b\right]=\frac{M}{4}(b-a)^2$

法2 牛-莱公式 $f(x)=\int_a^xf'(t)dt=\int_b^xf'(t)dt$ $|f(x)|\leq M(x-a)$，$|f(x)|\leq M(b-x)$

法3 令$F(x)=\int_a^xf(t)dt$ $\rightarrow$ $F'(a)=F'(b)=0$ 证明 $|F(b)-F(a)|\leq\frac{M}{4}(b-a)^2$ Taylor公式 中点展

法4 $|\int_a^bf(x)dx|=|\int_a^bf(x)d(x+c)|=|(x+c)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b(x+c)f'(x)dx|\leq\int_a^b|x+c||f'(x)|dx\leq M\int_a^b|x+c|dx$

令 $c=-\frac{a+b}{2}$ 有 $|\int_a^bf(x)dx|\leq M\int_a^b|x-\frac{a+b}{2}|dx=M[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(\frac{a+b}{2}-x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-\frac{a+b}{2})dx]$