样题

系名＿＿＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿＿

一．填空题（每个空 3 分，共 10 题）（**请将答案直接填写在横线上！**）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x}=$＿＿＿＿＿。

2. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0\\ 3e^x+a, & x\ge 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a=$＿＿＿＿＿。

3. 设 $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=2,\ \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=1$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=$＿＿＿＿＿。

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=$＿＿＿＿＿。

5. 设 $a\in R$，且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-ax\right)$ 存在且有限，则 $a=$＿＿＿＿＿。

6. 设 $y=e^x+\arctan x$，则其反函数 $x=x(y)$ 的导数 $\dfrac{dx}{dy}=$＿＿＿＿＿。

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=$＿＿＿＿＿。

8. 设函数 f 可导，令 $y=f(\sin(x^2))$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

9. 当 $x\to 0$ 时函数 $\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x\tan x}$ 为 n 阶无穷小，则 $n=$＿＿＿＿＿。

10. 函数 $y=\tan^2(1-x)$ 的微分 $dy=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

二．解答题（共 8 题）（**请写出详细的计算过程和必要的根据！**）

11. （10 分）设 $y=x^2+\mathrm{e}^x$，求其反函数 $x=x(y)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$。

12. （10 分）求曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程。

13. （10 分）设函数 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，求 $y^{(100)}$。

14. (10 分) 求 a,b 的值使得极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x^5}+\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}\right)$ 存在（有限），并求该极限值。

15. (7 分) 证明函数 $f(x)=\ln x-x+100$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个零点。

16. （10 分）设 $0<x_0<1,\quad x_{n+1}=-x_n^2+2x_n, \forall n\ge0$。证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

17. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 分别在 $(a,c),\ (c,b)$ 上可导，其中 $c\in(a,b)$，求证：存在 $\xi\in(a,c)\cup(c,b)$，使得 $|f(b)-f(a)|\le|f'(\xi)||b-a|$。

18. (5 分) 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $(-1,1)$ 内有界，且存在 $a>0,\ b>1$，使得 $f(ax)=bf(x), \forall x\in(-\infty,+\infty)$。求证：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$。

三．附加题(5 分)

设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为单调增函数(不必连续)，求证：$\exists\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=\xi$。