样题解答

系名____________ 班级____________ 姓名____________ 学号____________

一．填空题（每个空 3 分，共 10 题）**（请将答案直接填写在横线上！）**

1．极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}=$_________。

解答：-1

2．若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0;\\ 3e^x+a, & x\ge 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a=$_________。

解答：-2

3．设 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=2,\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=1$，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=$_________。

解答：$\frac{3}{4}$.

4．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=$_________。

解答：-4

5．设 $a\in R$，且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-ax\right)$ 存在且有限，则 $a=$_________。

解答：-1

6. 设 $y=e^x+\arctan x$，则其反函数 $x=x(y)$ 的导数 $\dfrac{dx}{dy}=$_________。

解答：$\dfrac{1}{e^x+\frac{1}{1+x^2}}$.

7．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=$_________。

解答：$\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\ \sin\ x}-\sqrt{\cos x}}=\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1+x\ \sin\ x-\cos x}=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{x\ \sin x}{x^2}}\to\dfrac{1+1}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{4}{3}$.

8．设函数 f 可导，令 $y=f(\sin(x^2))$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________________________。

解答：$g'(x)=2x\cos(x^2)f'(\sin(x^2))$.

9. 当 $x\to 0$ 时函数 $\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x\tan x}$ 为 n 阶无穷小，则 $n=$________。

解答：1.

10. 函数 $y=\tan^2(1-x)$ 的微分 $dy=$________________。

解答：$dy=2\tan(1-x)\dfrac{-1}{\cos^2(1-x)}dx$ 或 $dy=\dfrac{-2\sin(1-x)}{\cos^3(1-x)}dx$.

11.（10 分）设 $y=x^2+e^x$，求其反函数 $x=x(y)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$。

解：$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2x+e^x}$,

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x+e^x}\right)\frac{dx}{dy}=\frac{-(2+e^x)}{(2x+e^x)^2}\frac{1}{(2x+e^x)}=-\frac{2+e^x}{(2x+e^x)^3}.$$

12.（10 分）求曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程。

解：参数 $t=\frac{\pi}{2}$ 对应曲线上的点为 $(x_0,y_0)=(e^{\frac{\pi}{2}},0)$.

在点 (x_0,y_0) 处曲线的斜率为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(e^t\cos t)'}{(e^t\sin t)'}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=-1,\quad t=\frac{\pi}{2}.$$

于是所求切线方程为 $y=-(x-e^{\frac{\pi}{2}})$.

13.（10 分）设函数 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，求 $y^{(100)}$。

解：将函数 $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ 改写为方便求导的形式

$$y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}=\frac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}}=2(1-x)^{\frac{-1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

于是
$$y^{(100)}=2\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(100)}-\left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)^{(100)}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{199}{2}\right)(1-x)^{-\frac{201}{2}}$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{197}{2}\right)(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$
$$=\frac{199!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}}+\frac{197!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

14.（10 分）求 a,b 的值使得极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x^5}+\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}\right)$ 存在（有限），并求该极限值。

解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x^5}+\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin 2x}{x}+ax^2+b}{x^4}$。

要使得极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x^5}+\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}\right)$存在（有限），则$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}+ax^2+b\right)=0$，

所以$b=-2$。

若极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x^5}+\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}\right)$存在（有限），则

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2x+ax^3}{x^3}=0,$$

所以$a=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\sin 2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2\cos 2x}{3x^2}=\dfrac{4}{3}$。

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{x^5}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2x+\frac{4}{3}x^3}{x^5}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos 2x-2+4x^2}{5x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin 2x+2x}{5x^3}=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{2-\cos 2x}{3x^2}=\frac{4}{15}$$

15.（7 分）证明函数 $f(x)=\ln x-x+100$ 在开区间$(0,+\infty)$内有且仅有两个零点。

证明：由于 $f(0^+)=-\infty$，$f(1)=100-1=99>0$，$f(+\infty)=-\infty$，
或者简单计算得 $f(e^{-100})=-e^{-100}<0$，$f(e^{100})=200-e^{100}<0$，
根据连续函数的介值性质可知，函数 $f(x)$ 开区间$(0,+\infty)$上至少有两个零点.

假设函数 $f(x)$ 开区间$(0,+\infty)$上有三个零点，那么根据 Rolle 定理知其导数 $f'(x)$ 开区间$(0,+\infty)$上至少有两个零点。

但是 $f'(x)=\frac{1}{x}-1$ 在开区间$(0,+\infty)$上仅有一个零点。

所以函数 $f(x)=\ln x-x+100$ 在开区间$(0,+\infty)$上有且仅有两个零点.

16.（10 分）设$0<x_0<1$，$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n,\forall n\ge0$。证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解：由假设 $x_0\in(0,1)$ 可知 $x_1=-x_0^2+2x_0=1-(1-x_0)^2\in(0,1)$.
假设 $x_n\in(0,1)$，则 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n=1-(1-x_n)^2\in(0,1)$.

因此由归纳法原理可知 $x_n \in (0,1)$，$\forall n \geq 0$，数列$\{x_n\}$为有界数列。

对 $\forall n \geq 0$，$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 + 2x_n - x_n = x_n(1 - x_n) > 0.$

因此数列$\{x_n\}$单调增加。

故数列$\{x_n\}$收敛。

设极限值为 x_*. 在递推关系式$x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n$ 中令 $n \to +\infty$ 得

$$x_* = -x_*^2 + 2x_*.$$

解之得 $x_* = 1$ 或 $x_* = 0$。

因此数列$\{x_n\}$单调增加，所以 $x_* > 0$，即$x_* = 1$。

因此$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1.$

17. (8 分) 设函数 $f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(x)$分别在(a,c), (c,b)上可导，其中$c \in (a,b)$，求证：存在$\xi \in (a,c) \cup (c,b)$，使得$|f(b) - f(a)| \leq |f'(\xi)||b-a|$。

求证：存在$\xi \in (a,c) \cup (c,b)$，使得$|f(b) - f(a)| \leq |f'(\xi)||b-a|$。

证明：在区间$[a,c]$ 和$[c,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理知存在 $\xi_1 \in (a,c)$，$\xi_2 \in (c,b)$, 使得

$$f(c) - f(a) = f'(\xi_1)(c-a),$$
$$f(b) - f(c) = f'(\xi_2)(b-c).$$

于是

$$f(b) - f(a) = f(b) - f(c) + [f(c) - f(a)] = f'(\xi_1)(c-a) + f'(\xi_2)(b-c).$$

由此得 $|f(b) - f(a)| \leq |f'(\xi_1)|(c-a) + |f'(\xi_1)|(b-c)$.

不妨设 $|f(\xi_1)| \geq |f'(\xi_2)|$，则$|f(b) - f(a)| \leq |f'(\xi)|(b-a)$，其中 $\xi = \xi_1$.

18. (5 分) 设函数 f 在 R 上有定义，在$(-1,1)$内有界，且存在$a > 0$, $b > 1$，使得 $f(ax) = bf(x), \forall x \in R$。求证：$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$。

证明：由题设知，存在$M > 0$使得当$|x| < 1$时，$|f(x)| \leq M$.

由题意， $f(ax)=bf(x),\ \forall x\in R$， 且 $a>0,b>1$ ，

所以 $\forall\varepsilon>0$， 取 $m\in N^{+}$， 使得 $M/b^{m}<\varepsilon$ 。

取 $\delta=1/a^{m}$， 则当 $|x|<\delta$ 时， $|a^{m}x|<1$， 从而 $|f(x)|=|b^{-m}f(a^{m}x)|\le b^{-m}M<\varepsilon$. 即 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

附加题(5 分)

设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为单调增函数(不必连续)，求证：$\exists\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=\xi$ 。

证明：利用区间套定理证明.

记 $[a_1,b_1]=[0,1]$. 由假设知 $a_1\le \mathrm{f}(a_1)\le \mathrm{f}(b_1)\le b_1$.

若 $\mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{2}$， 定义 $[a_2,b_2]=\left[0,\frac{1}{2}\right]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$；

若 $\mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}$， 则定义 $[a_2,b_2]=[\frac{1}{2},1]=[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$.

于是 $\mathrm{f}(a_2),\mathrm{f}(b_2)\in[a_2,b_2]$.

这种区间分半的做法继续下去，我们就得到一个区间套 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$，且 $\mathrm{f}(a_n),\mathrm{f}(b_n)\in[a_n,b_n]$， $\forall \mathrm{n}\ge 1$.

由做法知区间 $[a_n,b_n]$ 的长度 $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\to 0$， 由区间套定理知 $\cap_{n\ge 1}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

由于 $a_n\le\xi\le b_n$ 知 $a_n\le f(a_n)\le \mathrm{f}(\xi)\le f(b_n)\le b_n$， $\forall \mathrm{n}\ge 1$， 并且 $a_n\to\xi$， $b_n\to\xi$， 故 $\mathrm{f}(\xi)=\xi$. 证毕.