2020 秋季学期微积分 A(1)期中考试（电子系）

试题及参考解答（A 卷，附评分建议）

一、填空题（13 题，每题 3 分，共 13 题，共 39 分）：

1．已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1a_1)^2+(2a_2)^2+\cdots+(na_n)^2}{n^3} = \underline{\ \ 3\ \ }$。

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin x-\sin(\sin x)} = \underline{\ \ 6\ \ }$。

3．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right) = \underline{\ \ 1\ \ }$。

4．$\lim\limits_{x\to\infty}[e(1+\dfrac{1}{x})^{-x}]^x = \underline{e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}}$ 。

5．设 $x\to 0$ 时 $e^x-(ax^2+bx+1)=o(x^2)$，则 $a+b=\underline{\ \ 3/2\ \ }$。

6．在 $x\to 0$ 时 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 是$\underline{\ \ 1\ \ }$阶无穷小。

7．曲线 $y=x\ln(2+\dfrac{1}{x})$ 的斜渐近线方程为 $\underline{y=x\ln 2+\dfrac{1}{2}}$ 。

8．设 $f(x)=\begin{cases}|x|^\alpha \sin\dfrac{1}{x^4}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续且可导，则 $\alpha\in\underline{(1,+\infty)}$。（取值区间）

9．已知函数 f 可导且 $f'\neq 0$，设 $y=f(\tan x)$ 定义了反函数 $x=x(y)$，

则 $\dfrac{dx}{dy}=\underline{\dfrac{\cos^2 x}{f'(\tan x)}}$。

10．已知 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$， $y=f(\dfrac{1+x}{1-x})$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}}=\underline{\dfrac{8\pi}{3}=8\arctan\sqrt{3}}$。

11．由方程 $x^2+y^2+\ln x+\sin y=1$ 确定的曲线在 $(1,0)$ 点的切线方程为$\underline{3x+y=3}$。

12．设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)$ ，则 $f'(0)=\underline{\ \ 2020!\ \ }$。

13．已知 $\varphi(x)$ 可导且 $\varphi'(1)=1$，又设方程 $y=\varphi(xy)$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，且 $y(\dfrac{1}{2})=2$

则 $dy(\dfrac{1}{2})=\underline{\ \ 4dx\ \ }$。

二、计算证明题（7 题，每题 8-9 分，共 61 分）

1. （9 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在[0, 2]区间上的连续性，

如有间断点指出其间断点类型。

解：当 $0\le x\le 2$ 时 $0<\cos(x-1)\le 1$，且只要 $x\neq 1$，$0\le\sin(\frac{\pi}{2}x)<1$，

这时函数 $f(x)=\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$ 连续（$x\neq 1$）； ———————— 3 分

考虑 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$，这是 0/0 型未定式，应用 L-法则得到

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)\cos(x-1)}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)}=-\frac{4}{\pi^2}$$ ——————— 4 分

也即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\dfrac{4}{\pi^2}\neq f(1)$，所以 x=1 是可去间断点。 ——————— 2 分

2. （9 分）已知数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A。设曲线 $y=x^{2n}+a_n$ 在点 $(1,1+a_n)$ 处的切线

与 x 轴的交点为 $(\lambda_n,0)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^n$。

解：曲线 $y=x^{2n}+a_n$ 在点 $(1,1+a_n)$ 处的切线方程是

$y=1+a_n+2n(x-1)$， —————————— 3 分

令 $y=0$ 得 $\lambda_n=1-\dfrac{1+a_n}{2n}$，所以 —————————— 3 分

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1+a_n}{2n})^n=\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1+a_n}{2n})^{\frac{2n}{1+a_n}}\right]^{\frac{1+a_n}{2}}=e^{-\frac{1+A}{2}}$$ ——————— 3 分

3. （9 分）设 $y=f(x)$ 严格单调且有二阶导数，其反函数为 $x=g(y)$

已知 $f(1)=a,\ f'(1)=b\neq 0,\ f''(1)=c$。求 $g''(a)$。

解：由 $f(1)=a$ 知 $g(a)=1$（即 $x=1$ 时 $y=a$），于是 ———————— 1 分

由 $y=f(x)=f(g(y))$ 两边对 y 求导得 $1=f'(x)g'(y)$，

所以 $g'(a)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{b}$； ———————— 3 分

由 $f'(x)g'(y)=1$ 再次关于 y 求导得到

$$f''(x)[g'(y)]^2 + f'(x)g''(y) = 0,$$

于是 $g''(y) = -\dfrac{f''(x)(g'(y))^2}{f'(x)}$， —————————— 3 分

代入 $f''(1)=c, f'(1)=b$，以及 $g'(a)=1/b$，

得到 $g''(a) = -c/b^3$。 —————————— 2 分

4.（9 分）设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b\ln x+c, & x\ge 1 \\ e^x, & x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 点 2 阶可导，求 a,b,c 的值。

解：$f(x)$ 在 $x=1$ 点可导必连续，所以

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x) = a+c = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^x = e, \quad \text{———————— 1 分}$$

其次 $f(x)$ 在 $x=1$ 点可导，其左右导数都存在且相等：

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+b\ln x+c-e}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{2ax+b/x}{1} = 2a+b$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^x-e}{x-1} = e\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} = e = 2a+b \quad \text{———————— 3 分}$$

最后在 $x=1$ 点二阶左右导数相等，类似上面计算导出

$$f''_-(1) = e = f''_+(1) = \lim_{x\to 1^+}(2a - b/x^2) = 2a-b \quad \text{———————— 3 分}$$

综上有 $a+c=e, 2a+b=e, 2a-b=e$，所以 $a=c=\dfrac{e}{2},\ b=0$。 ———— 2 分

5.（8 分）设 $f(x)$ 于区间 $[0,1]$ 上连续在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=1$，$f(1)=0$，

且 $f(x)$ 不是线性函数。证明存在 $c\in(0,1)$，使得 $f'(c)<-1$。

证明：由题意 $f(x)$ 不恒等于 $1-x$，因此 $\exists x_0\in(0,1)$，

使得 $f(x_0)\ne 1-x_0$。 ———————— 2 分

若 $f(x_0)<1-x_0$，则 $\exists c\in(0,x_0)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0} < \frac{1-x_0-1}{x_0} = -1; \quad \text{———————— 3 分}$$

若 $f(x_0)>1-x_0$，则 $\exists c\in(x_0,1)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0} < \frac{0-(1-x_0)}{1-x_0} = -1。 \quad \text{———————— 3 分}$$

6.（8 分）证明方程 $x^2-2\ln(1+x^2)-1=0$ 有且仅有一个正根。

证明：$f(x)=x^2-2\ln(1+x^2)-1$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=-1$，$f(+\infty)=+\infty$，

由连续函数介值性质 $f(x)=0$ 至少有一个正根。 ———————— 2 分

注意 $f'(x)=2x-\dfrac{4x}{1+x^2}=\dfrac{2x(x^2-1)}{1+x^2}$， ———————— 2 分

可见 $f(x)$ 有唯一正临界点 $x=1$，且

$\forall x\in(0,1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上严格单调下降，

因此 $\forall x\in(0,1)$，$f(1)<f(x)<f(0)=-1$； ———————— 2 分

$\forall x\in(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上严格单调上升，

由此可见 $f(x)$ 有且仅有一个正零点，且位于开区间 $(1,+\infty)$。 ———— 2 分

7.（9 分）设 $x_0>0$，$x_n=\sin x_{n-1}$, $n=1,2,3,\cdots$。

（1）证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，并求其值；

（2）求出极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n^2$。【提示：可以应用 Stolz 定理】

证明：（1）$x_0>0$，不妨令 $x_1=\sin x_0\in(0,1]$，则 $x_n=\sin x_{n-1}>0$，$n=2,3,\cdots$

注意到 $x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}$，$\{x_n\}$ 单调下降，有下界，故收敛。

记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$，则 $A=\sin A$，$A=0$。 ———————— 4 分

（2）应用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to+\infty}nx_n^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{x_{n+1}^2}-\dfrac{1}{x_n^2}}=\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2\sin^2x_n}{x_n^2-\sin^2x_n}$$ ———— 2 分

已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin^2x}{x^2-\sin^2x}=3$（可应用 L'Hospital 法则计算），故

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n^2\sin^2x_n}{x_n^2-\sin^2x_n}=3$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n^2=3$ ———————— 3 分