

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A1 期中考试样题

系名_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 题) (请将答案直接填写在横线上!)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}} =$ _____。

2. 函数 $xe^{1/x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上取得最小值的点是 $x =$ _____。

3. 函数 $(1+x^2)\arctan x$ 的二阶导数为 _____。

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) =$ _____。

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2} \right) =$ _____。

6. 函数 $y = \arctan x + e^x$ 的反函数导数为 $\frac{dx}{dy} =$ _____。

7. 若可微函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $x = t + e^t$, $y = t^2 + e^{2t}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____。

8. 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} =$ _____。

9. 函数 $f(x) = \frac{1+e^x}{2+3e^x}$ 的间断点 $x=0$ 的类型是 _____。

10. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____。

11. 函数 $y = x^{\sin(2x+1)}$ ($x > 0$) 的微分 $dy =$ _____。

12. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\ln(1+x\sqrt{1+x})$ 与函数 x^p 为等价无穷小, 则 $p =$ _____。

13. 函数 $\frac{x}{1-x^2}$ 的 n 阶导数为 _____。

14. 在 $x-y$ 平面上, 参数曲线 $x=t^2+\sin t, y=t+\cos t$ 于点 $(0,1)$ 处 (对应 $t=0$ 的点) 的切线方程为 _____。

15. 函数 $\frac{1}{x}$ 在点 $x=1$ 处带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展式为

_____。

二. 计算题 (每题 10 分, 共 4 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

2. 假设由方程 $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$ 确定了一个在 $x=0$ 的一个邻域内二阶可导的隐函数 $y = y(x)$ 。试求函数 $y(x)$ 的二阶 Maclaurin 展式, 带 Peano 余项。

3. 求函数 $f(x) = |x(x^2 - 1)|$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上的最大值。

4. 求抛物线 $y = x^2$ 上一个点 (x_1, y_1) , 以及双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上一个点 (x_2, y_2) , 使得抛物线在点 (x_1, y_1) 处的切线与双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 (x_2, y_2) 处的切线相同。并写出这条公共切线的方程。

三. 证明题 (请写出详细的证明过程!)

1. (8 分) 证明方程 $x^5 - 2x^3 - 1 = 0$ 有且仅有一个正根。

2. (7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且满足 $|f'(x)| < 1, \forall x \in (0,1)$, 以及 $f(0) = f(1)$ 。证明 $|f(x_1) - f(x_2)| < 1/2, \forall x_1, x_2 \in (0,1)$ 。