清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　**微积分 A(1)**　(B)　2013 年 11 月 17 日

系名____________　**班级**____________　**姓名**____________　**学号**____________

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（**请将答案直接填写在横线上！**）

1. 当$x\to 0$时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$与x^p为同阶无穷小，则$p=$__________。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+x}}{\ln(1+x^2)}=$__________。

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(3^{\frac{1}{n-1}}-3^{\frac{1}{n}}\right)=$__________。

4. 由方程$x^2+y^2+\sin x+\sin y=1$确定的隐函数$y=y(x)$的导数$\dfrac{dy}{dx}=$__________。

5. 函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$连续，则$a=$__________。

6. 函数$y=\sin x+e^x$的反函数的微分$dx=$__________。

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)(x+3)}\right)^x=$__________。

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=$__________。

9. 设$f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & x\geq 0\end{cases}$，则$f'(0)=$__________。

10. 曲线L的参数方程为$\begin{cases}x=\sin t+t\\ y=t\sin t-\cos t\end{cases}$（$t$为参数），则$L$在参数$t=\dfrac{\pi}{2}$点的切线方程为

____________________。

11. 设a,b均为大于零的常数，$f(x)=a^{x^b}$，则$f'(x)=$__________。

12. 曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为______________________。

13. 设 $(1,3)$ 为 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $b-a=$_______________。

14. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^n}\ (x\geq 0)$ 的间断点类型为________________。

15. 使不等式 $\ln(1+x)<\alpha+2\sqrt{1+x}$ 对任意的 $x>0$ 都成立的 α 的最小值为_________。

二．计算题（每题 10 分，共 4 题）**（请写出详细计算过程和必要的根据！）**

1. 求由参数形式 $\begin{cases} x=\cos t+t \\ y=\sin t+t \end{cases}$ 给出的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

2. 求函数 $f(x)=\sin(x^2+2\sqrt{\pi}x)$ 在 $x_0=-\sqrt{\pi}$ 处的带有 Peano 余项的 Taylor 公式（求出一般项），并求 $f^{(n)}(-\sqrt{\pi})$。

3. 设 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$，求 $f(x)$ 的定义域、单调区间、极值点、凸性区间、拐点及渐近线，并画出 $y=f(x)$ 的示意图。

4. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 二阶连续可微，$g(0)=1,\ g'(0)=-1$。

（I）a 为何值时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

（II）当 $f(x)$ 为连续函数时，$f(x)$ 是否可导，若可导，求 $f'(x)$。

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

1.（8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 3 阶可导，且在 $[a,b]$ 上 $|f'''(x)|\leq M$，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\frac{h}{2})h+E(h)\quad (0<h<b-a)$$

其中 $E(h)$ 为误差项。求证：$|E(h)|\leq\dfrac{7}{24}Mh^3$。

2.（7 分）设 $x_0>0$，$x_n=\ln(1+x_{n-1})\quad (n=2,3,4,\cdots)$，求证：

（I）$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，并求其值；

（II）$\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=2$。