2013.11.17 期中考试答案

一. **填空题**（每空 3 分，共 15 题）（**请将答案直接填写在横线上！**）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $a=$________________。

答案：-2

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(3^{\frac{1}{n-1}}-3^{\frac{1}{n}}\right)=$________________________。

答案：$\ln 3$

3. 函数 $y=\sin x+e^x$ 的反函数的微分 $dx=$__________________________。

答案：$\dfrac{1}{\cos x+e^x}dy$

4. 由 方 程 $x^2+y^2+\sin x+\sin y=1$ 确 定 的 隐 函 数 $y=y(x)$ 的 导 数 $\dfrac{dy}{dx}=$_____________。

答案：$-\dfrac{2x+\cos x}{2y+\cos y}$

5. 当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^p 为同阶无穷小，则 $p=$___________。

答案：5

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+x}}{\ln(1+x^2)}=$________________。

答案：0

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=$________________。

答案：$\dfrac{1}{3}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)(x+3)}\right)^x=$________________。

答案：e^{-1}

9. 设a,b均为大于零的常数，$f(x)=a^{x^b}$，则$f'(x)=$______________________。

答案：$b\ln a x^{b-1}a^{x^b}$

10. 曲线L的参数方程为$\begin{cases}x=\sin t+t\\ y=t\sin t-\cos t\end{cases}$（$t$为参数），则$L$在参数$t=\dfrac{\pi}{2}$点的切线方程为

_____________________________________。

答案：$y=2x-2-\dfrac{\pi}{2}$

11. 设$f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & x\ge 0\end{cases}$，则$f'(0)=$________。

答案：0

12. 函数$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^n}\ (x\ge 0)$的间断点类型为_______________。

答案：第一类

13. 曲线$y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线方程为______________________。

答案：$y=2x+1$

14. 设$(1,3)$为$y=ax^3+bx^2$的拐点，则$b-a=$______________。

答案：6

15. 使不等式$\ln(1+x)<\alpha+2\sqrt{1+x}$对任意的$x>0$都成立的$\alpha$的最小值为________。

答案：-2

$$\alpha_{\max}=\sup_{x>0}\left\{\ln(1+x)-2\sqrt{1+x}\right\}=\left\{\ln(1+x)-2\sqrt{1+x}\right\}\Big|_{x=0}=-2$$

二．　计算题（每题 10 分，共 4 题）（**请写出详细计算过程和必要的根据！**）

1. 求由参数形式$\begin{cases} x=\cos t+t \\ y=\sin t+t \end{cases}$给出的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\cos t}{1-\sin t}$　，　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1+\cos t-\sin t}{(1-\sin t)^3}$

2. 求函数 $f(x)=\sin(x^2+2\sqrt{\pi}x)$ 在 $x_0=-\sqrt{\pi}$ 处的带有 Peano 余项的 Taylor 公式（求出一般项），并求 $f^{(n)}(-\sqrt{\pi})$。

解：$f(x)=\sin(x^2+2\sqrt{\pi}x)=-\sin(x+\sqrt{\pi})^2$

$$=-(x+\sqrt{\pi})^2+\frac{1}{3!}(x+\sqrt{\pi})^6+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}(x+\sqrt{\pi})^{4n+2}+o((x+\sqrt{\pi})^{4n+2})$$

$f^{(4n+2)}(-\sqrt{\pi})=(4n+2)!\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}$，　其余　$f^{(n)}(-\sqrt{\pi})=0$

3. 设 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$，求 $f(x)$ 的定义域、单调区间、极值点、凸性区间、拐点及渐近线，并画出 $y=f(x)$ 的示意图。

（1）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\bigcup(1,+\infty)$

（2）$f'(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)^3}}$

在 $(-\infty,0)$ 内，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调降；在 $(1,\dfrac{3}{2})$ 内，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调降；在 $(\dfrac{3}{2},+\infty)$ 内，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增；$x=\dfrac{3}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点。

（3）$f''(x)=\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)^3}}\cdot\dfrac{1}{x(x-1)}>0,\quad x\in(-\infty,0)\bigcup(1,+\infty)$，故 $f(x)$ 为定义域内的凸函数。

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\dfrac{1}{2}$，故当$x\to+\infty$时有渐近线$y=x-\dfrac{1}{2}$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=-\dfrac{1}{2}$，故当$x\to-\infty$时有渐近线$y=-x+\dfrac{1}{2}$；

$x=1$时垂直渐近线。

（5）函数的示意图（略）。

4. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中$g(x)$二阶可微，$g(0)=1,\ g'(0)=-1$。

（I）a为何值时$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 上连续；

（II）当$f(x)$为连续函数时，$f(x)$是否可微，若可微，求$f'(x)$。

解：(I)只要考虑在$x=0$点的连续性即可。$g(x)=1-x+o(x),\quad x\to 0$。故当$x\neq 0$时，$f(x)=o(1)$，即$a=0$时$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 上连续。

(II)只要考虑在$x=0$点的可微性即可。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}\right]=\frac{g''(0)-1}{2}$$

$f(x)$可微，

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0\\[2ex] \dfrac{x(g'(x)+e^{-x})-(g(x)-e^{-x})}{x^2}, & x\neq 0\end{cases}$$

三．**证明题（请写出详细的证明过程！）**

1.（8 分）设$f(x)$在区间$[a,b]$上 3 阶可导，且在$[a,b]$上$|f'''(x)|\le M$，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\frac{h}{2})h+E(h)\quad（0<h<b-a）$$

其中$E(h)$为误差项。求证：$|E(h)|\le\dfrac{7}{24}M|h|^3$。

证明：在$x=a$点写出$f(x)$带 Lagrange 型余项的 2 阶 Taylor 展开：

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f'''(a+\theta_1 h)}{6}h^3，\quad 0<\theta_1<1；$$

另一方面，在 $x=a$ 点写出 $f'(x)$ 带 Lagrange 型余项的 1 阶 Taylor 展开：

$$f'(a+\frac{h}{2})=f'(a)+f''(a)\frac{h}{2}+\frac{f'''(a+\theta_2 h)}{2}(\frac{h}{2})^2，\quad 0<\theta_2<1，$$

于是

$$f(a)+f'(a+\frac{h}{2})h=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f'''(a+\theta_2 h)}{8}h^3；$$

与第一式比较得到

$$|E(h)|=|f(a)+f'(a+\frac{h}{2})h-f(a+h)|$$
$$=|[\frac{f'''(a+\theta_2 h)}{8}-\frac{f'''(a+\theta_1 h)}{6}]h^3|\le(\frac{1}{8}+\frac{1}{6})Mh^3=\frac{7}{24}M|h|^3。$$

2.（7 分）设 $x_0>0$，$x_n=\ln(1+x_{n-1})\quad(n=2,3,4,\cdots)$，求证：

（I）$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，并求其值；

（II）$\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=2$。

证明：（I）$x_0>0$，$x_n=\ln(1+x_{n-1})$，故 $x_n>0,\quad n=1,2,\cdots$。

$$x_n=\ln(1+x_{n-1})<x_{n-1}，$$

数列 $\{x_n\}$ 为单调下降数列，有下界，故收敛。记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$，则 $A=\ln(1+A)$，$A=0$。

（II）由 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to+\infty}nx_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}}=\frac{x_n x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}$$

由（I），$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=2$，故

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}=2$$

$$\lim_{n\to+\infty}nx_n=2$$