清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　微积分 A　　　　　2012 年 11 月 11 日

一、填空题（3*15 = 45）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtan^4x}{sin^3x(1-cosx)} =$ ______________。

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} =$ ______________。

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) =$ ______________。

4. $f(\mathrm{x}) = x^2|x|$ 在 x = 0 处存在最高阶导数的阶数为 ______________。

5. 曲线 y = $e^x + x^2 + 1$在其上的点（0,2）处的切线方程为 ______________。

6. 设函数$\mathrm{y} = \mathrm{y}(x)$参数方程$\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} =$ ______________。

7. 设$f(\mathrm{x}) = \frac{x}{1-x}$，则$f^{(10)}(x) =$ ______________。

8. 设$y = x + \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$，则其反函数的导数$\frac{dx}{\mathrm{dy}}$ = ______________。

9. 设$\mathrm{x}\to 0$时$1-\cos x$与$1-(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}$ = ______________。

10. 设函数 f, g 均可微，$\mathrm{y} = f(\mathrm{x}^2)g(\mathrm{x}^3)$，则$\mathrm{dy} =$ ______________________________。

11. 函数$f(\mathrm{x}) = \sin^{-1}\frac{1}{1-\mathrm{x}}$ 在 x = 1 点处间断点的类型为 ______________。

12. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{sin^2x}} =$ ______________。

13. $\lim\limits_{n\to +\infty} cos^2\left(\sqrt{n^2+n\pi}\right) =$ ______________。

14. 曲线$\mathrm{y} = \frac{x^3+3x+4}{x+1}$ 的斜渐近线为 ______________。

15. 函数$f(\mathrm{x}) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x$ 在区间$[-1,2]$上的最小值为 ______________。

二、计算题（10*4 = 40）

1. 设函数$f(\mathrm{x}) = \begin{cases}\ln(x^2+a^2)，x > 1 \\ \sin b(x-1)，x \le 1\end{cases}$ 在$\mathbb{R}$上可导，求a，b的值。

2. 求函数$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ 的单调性、凸性区间，并求其极值点与拐点。

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x} - e^{-\frac{x^2}{6}}}{\sin(x^2)-\ln(1+x^2)}$

4. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x = \ln t + t \\ y = \frac{t^2}{2} + t \end{cases}$ 确定，求$\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

三、证明题（请写出详细的证明过程！）

1. （8 分）设$0 \le x_1 \le \sqrt{c}$，$x_{n+1} = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n}$，其中$c > 1$为常数，求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

2. （7 分）设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$可导，

（1）若$f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，求证：$\exists\xi \in (0,+\infty)$使得 $f'(\xi) = 0$；

（2）若$f(x)$满足$0 \le f(x) \le \ln\left(\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$，求证：$\exists\xi \in (0,+\infty)$使得$f'(\xi) = \frac{2}{2\xi+1} - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$。