清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　　一元微积分　　(A)

系名________ 班级________ 姓名________ 学号________

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（请将答案直接填写在横线上！）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{x}=$________。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-x}{\arcsin x+x}=$________。

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^{3})}=$________。

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=$________。

5. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ 为 x^{k} 的同阶无穷小量，则 $k=$________。

6. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 在 $x=1$ 处间断点的类型为________。

7. 设 $y=x^{x}\quad(x>0)$，则其微分 $dy=$________。

8. $f(x)=e^{\sin(x^{2}+1)}$，则 $f'(x)=$________。

9. 设由 $x=2t+\sin t,\ y=\cos t$ 决定 $y=f(x)$，则在 $x=0$，即（$t=0$）点 $f'(0)=$________。

10. 设 $y=e^{x}+\ln x\quad(x>0)$，则其反函数 $x=x(y)$ 的导数 $\dfrac{dx}{dy}=$________。

11. 函数 $f(x)=xe^{x}$ 的 n 阶导函数 $(n\geq 1)$ $f^{(n)}(x)=$________。

12. 函数 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上最大值为 ____________________。

13. 设 $f(x)=|x-\sin x|$，则 $f'(0)=$ ______________________。

14. 曲线 $y=(x+1)(\sqrt[3]{3-x})$ 在其上一点 $(-1,0)$ 的法线方程为__________________________。

15. 曲线 $y=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$ 的渐近线方程为_________________。

二．**计算题**（每题 10 分，共 4 题）（**请写出详细计算过程和必要的根据！**）

1．确定 a,b 值使函数 $f(x)=\begin{cases}\sin ax & x\le 0\\ \ln(1+x)+b & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导。

2. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$。

3. 设 $f''(x)$ 存在，且 $f'(x)\ne 1,\forall x\in(-\infty,+\infty)$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=f(x+y)$ 确定，求 y' 与 y''。

4．求 $f(x)=\left|x^3-2x^2+x\right|$ 的所有最大单调区间，上凸下凸区间，极大值点和极小值点，并画出 $y=f(x)$ 的图像示意图。

三．**证明题**（**请写出详细的证明过程！**）

1．（8 分）证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$。

2．（7 分）设 $f(x)\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$ 为下凸函数。

（1）证明：$\forall x_0,x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$；

（2）证明：若存在常数 $M>0$ 使得 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $|f(x)|\le M$，则 $f(x)$ 为常数函数。