微积分 A(1)
期中总结

概览

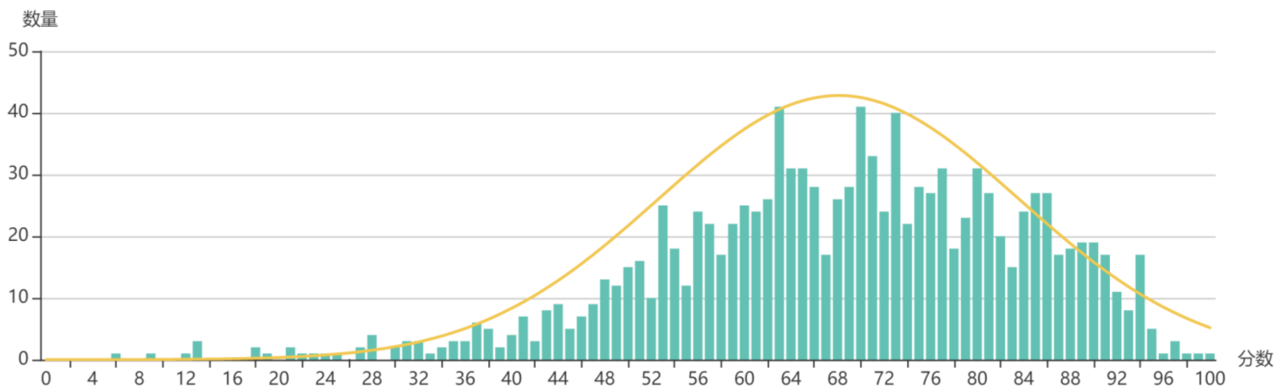
1182/1222 实考人数/总人数	100 最高分	68.1 平均分	6.35% 优秀率	73.27% 及格率

参与情况： 共11个班级、1182人参加考试， 40人未参加考试。 查看*未参加考试学生名单*

优秀率： 考试成绩达到总分的90%及以上的学生占比。

及格率： 考试成绩达到总分的60%及以上的学生占比。

成绩分布



A 题号	A 难度	A 区分度	B 难度	B 区分度	B 题号
1	0.75	0.5	0.75	0.5	2
2	0.75	0.51	0.8	0.41	1
3	0.73	0.54	0.75	0.5	3
4	0.87	0.26	0.88	0.24	4
5	0.93	0.14	0.93	0.13	6
6	0.52	0.96	0.5	1	5
7	0.95	0.1	0.94	0.13	9
8	0.5	1	0.5	1	8
9	0.5	1	0.5	1	7
10	0.5	1	0.5	1	10
11	0.77	0.47	0.77	0.46	11
12	0.62	0.76	0.62	0.77	12
13	0.79	0.42	0.79	0.43	13
14	0.73	0.53	0.71	0.59	14
15	0.56	0.89	0.55	0.9	15
16	0.42	0.81	0.42	0.82	16
17	0.24	0.46	0.23	0.45	17

难度：满分 1 分时的平均成绩，0.7-0.8 反映学生整体实际水平。

区分度：满分 1 分时最高组成绩与最低组成绩之差。区分度大于 0.4，可以有效甄别。

极限、Taylor 展开、洛必达

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+n})$

这是数列极限，$n\to\infty$ 即 $n\to+\infty$。

- 方法 1：Taylor 展开（推荐方法，突出主要矛盾，恰当使用 o 符号）

  主项，决定展开的阶：

$$n-\sqrt{n^2+n}=n-n\sqrt{1+\frac{1}{n}}=n-n\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}+o(1)\to-\frac{1}{2}$$，其中 $no\left(\frac{1}{n}\right)=o(1)$

- 方法 2：分子有理化（初等方法，适合初学者）

$$n-\sqrt{n^2+n}=\frac{n^2-\left(n^2+n\right)}{n+\sqrt{n^2+n}}=\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}}=\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\to-\frac{1}{2}$$

- 常见错误：$\frac{1}{2}$（初等计算错误所致）

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$

这是$\dfrac{0}{0}$型极限

- L'Hôpital 法则： $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{3})}{2\sin x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，你验证 L'Hôpital 的条件了吗？
- Taylor 展开：换元，在零处展开

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{1-2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{t+o(t)}{\sqrt{3}t+o(t)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

- 错误答案 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{3})}{1+2\sin x}=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$。

5. 已知 $f(0)=f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-1}{\sin^2 x}$

- Taylor 展开（微分定义）

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)(1-\cos x)+o(1-\cos x)-1}{(x+o(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\frac{1}{2}$$

- L'Hôpital 法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(1-\cos x)\sin x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(1-\cos x)}{2\cos x}=\frac{f'(0)}{2}=\frac{1}{2}$$

对吗？

- 可以先猜个答案：取 $f(x)=1+x$ 试试看。

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

- Taylor 展开：先改写为基本初等函数的复合

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(\mathrm{e}^x+\sin x)}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x+o(x)+x+o(x))}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}(2x+o(x))}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{2+o(1)}=\mathrm{e}^2$$

- L'Hôpital 法则：$\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\sin x)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\cos x}{\mathrm{e}^x+\sin x}}=\mathrm{e}^2$

- 凑成标准极限形式：

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\mathrm{e}^x+\sin x-1)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x+\sin x-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\sin x-1}{x}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}^x+\sin x-1}{x}}=\mathrm{e}^2$$

这个方法不推荐使用（倒数第 2 个等号成立吗？）。

- 常见错误：答案2，取对数后求极限，最后忘记回复为指数。

处理复杂的幂，建议采用换底 $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$。

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$

- 经典极限代入： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x^2}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$。错了！ 回顾上题解法 3

- Taylor 展开：先改写为基本初等函数复合

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to\infty}e^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

本题难度 0.5，区分度为 1，猜测不少学生用了解法 1 得到错误答案

8. 已知 $f''(0)=1$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}$

- 二阶 Taylor 展开：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0)+f'(0)2h+\frac{f''(0)}{2}(2h)^2+o(h^2)+2\left[f(0)+f'(0)(-h)+\frac{f''(0)}{2}(-h)^2+o(h^2)\right]-3f(0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3f''(0)h^2+o(h^2)}{h^2}=3$$

- L'Hôpital 法则：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(2h)4+2f''(-h)(-1)^2}{2}=3f''(0)$。对吗？

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f'(2h)-2f'(-h)}{2h}=?$ 或者用 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ 试试看。

12. 求$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{(x^x-e^e)^2}{e^x-x^e}$。

解：　等价无穷小代换（Taylor 展开）+ L'Hôpital 法则：

$$\lim_{x\to e}\frac{(x^x-e^e)^2}{e^x-x^e}=\lim_{x\to e}\frac{e^{2e}(e^{x\ln x-e}-1)^2}{e^{e\ln x}(e^{x-e\ln x}-1)}=e^e\lim_{x\to e}\frac{(x\ln x-e)^2}{x-e\ln x}=e^e\lim_{x\to e}\frac{2(x\ln x-e)(\ln x+1)}{1-\frac{e}{x}}$$

$$=4e^{e+1}\lim_{x\to e}\frac{x\ln x-e}{x-e}=8e^{e+1}$$

解法 2：L'Hôpital 法则：

$$\lim_{x\to e}\frac{(x^x-e^e)^2}{e^x-x^e}=\lim_{x\to e}\frac{2(x^x-e^e)x^x(\ln x+1)}{e^x-ex^{e-1}}=4e^e\lim_{x\to e}\frac{x^x-e^e}{e^x-ex^{e-1}}=4e^e\lim_{x\to e}\frac{x^x(\ln x+1)}{e^x-e(e-1)x^{e-2}}=8e^{e+1}$$

解法 3：Taylor 展开：换元，利用常用基本初等函数在零处展开

$$x^x = e^{x\ln x} = e^{e(1+t)\ln[e(1+t)]} = e^{e(1+t)(1+t+o(t))} = e^{e(1+2t+o(t))} = e^e(1+2et+o(t)) ,$$

$$e^x = e^{e(1+t)} = e^e\left(1+et+\frac{e^2t^2}{2}+o(t^2)\right),$$

$$x^e = \left[e(1+t)\right]^e = e^e\left(1+et+\frac{e(e-1)t^2}{2}+o(t^2)\right),$$

所以 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{(x^x-e^e)^2}{e^x-x^e} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\left[e^e(2et+o(t))\right]^2}{\dfrac{(et)^2}{2}-\dfrac{e(e-1)t^2}{2}+o(t^2)} = 8e^{e+1}$。

常见错误：在 $x=0$ 处 Taylor 展开。不会计算 $(x^x)'$，或对数求导法后忘了返回。

建议：不用对数求导法，换底 $e^{x\ln x}$ 用链索法则。

15.求a,b的值，使函数$f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$当$x\to 0$时达到可能的最高阶无穷小量，并求阶。

解：分析，函数 Taylor 展开为关于x^2的函数，常数项为零，两个参数，至少需要展开到x^6。

当$x\to 0$时，

$$f(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)-(1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6))$$

$$=(-\frac{1}{2}-a+b)x^2+(\frac{1}{4!}-b^2+ab)x^4-(\frac{1}{6!}+ab^2-b^3)x^6+o(x^6)$$

让低此项系数为零：$-\dfrac{1}{2}-a+b=0,\dfrac{1}{4!}-b^2+ab=0$，解得$a=-\dfrac{5}{12},b=\dfrac{1}{12}$。

此时x^6的系数$\dfrac{1}{6!}+ab^2-b^3=\dfrac{1}{720}-\dfrac{1}{288}<0$，函数$f(x)$当$x\to 0$时是6阶无穷小量。

解法 2:

$$f(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=\frac{(1+bx^2)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)-(1+ax^2)}{1+bx^2}$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}+b-a\right)x^2+\left(\frac{1}{24}-\frac{b}{2}\right)x^4+\left(\frac{b}{24}-\frac{1}{720}\right)x^6+o(x^6)}{1+bx^2}$$

当$-\frac{1}{2}+b-a\neq 0$时，f 是二阶无穷小;

当$-\frac{1}{2}+b-a=0$且$\frac{1}{24}-\frac{b}{2}\neq 0$ 时，f 是四阶无穷小;

当$-\frac{1}{2}+b-a=0$且$\frac{1}{24}-\frac{b}{2}=0$ 时（$a=-\frac{5}{12},b=\frac{1}{12}$），$f$ 是六阶无穷小。

解法 3：讨论极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}$，用 L'Hôpital 法则，但估计你没这个耐心。并非每洛必达啊!

微分、切线、参数曲线、反函数

6. $y=x\ln(1+x^2)$，求$\mathrm{d}y\big|_{x=1}$。

- $\mathrm{d}y\big|_{x=1}=f'(1)\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y\big|_{x=1}=f'(1)\mathrm{d}x\big|_{x=1}$，$\mathrm{d}y\big|_{x=1}=f'(1)\mathrm{d}1$，$\mathrm{d}y\big|_{x=1}=f'(1)\mathrm{d}$，$\mathrm{d}y\big|_{x=1}=f'(1)$。哪个是对的？
- 什么是$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}x$？它们是y,x的无穷小改变量吗？什么是微分？微分与导数是什么关系？

7. $y=\dfrac{\ln x}{x}$在点$(1,0)$处的切线方程

一阶 Taylor 展开：$y=\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln 1}{1}+\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'\Bigg|_{x=1}(x-1)+o(x-1)=x-1+o(x-1)$

舍弃高阶无穷小，$y=x-1$即切线方程。

14. 已知曳物线的参数方程为$\begin{cases} x=a\left(\ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right)+\cos t\right) \\ y=a\sin t \end{cases}$，其中$a>0$，$t\in(0,\pi)$。$P$为曳物线上一点，$L$为曳物线在$P$的切线，记$L$与$x$轴的交点为$Q$，求证$|PQ|$为常数。

证明：$\begin{cases} x'(t)=a\left(\dfrac{1}{\tan\frac{t}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}-\sin t\right)=a\left(\dfrac{1}{\sin t}-\sin t\right)=\dfrac{a\cos^2 t}{\sin t}, \\ y'(t)=a\cos t \end{cases}$

切线$y-y(t)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}(x-x(t))$，切线与$x$轴交点$Q:y=0$，$x=x(t)-\dfrac{y(t)x'(t)}{y'(t)}$，

$$
|PQ|^2=(x-x(t))^2+(0-y(t))^2=\left(\frac{y(t)x'(t)}{y'(t)}\right)^2+y(t)^2=y(t)^2\left[1+\left(\frac{x'(t)}{y'(t)}\right)^2\right]
$$

$$
=a^2\sin^2 t\left[1+\cot^2 t\right]=a^2
$$

也可以用斜边斜率结合勾股定理求得。

常见问题：

- $x'(t)$计算错误，对复合函数链索法则不熟练甚至不理解。
- 对三角函数性质不熟，不会化简计算结果，导致后续计算负杂
- 对由参数导数确定$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$不理解，或记错公式。

关于参数方程求导

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{a\cos^2 t}{\sin t}, \\ y'(t) = a\cos t \end{cases}$$

因为$0<t<\pi$，所以$x'(t)=\dfrac{a\cos^2 t}{\sin t}>0$，因此$x=x(t)$有$C^\infty$反函数$t=t(x)$，（为什么？）

所以

$y(t)=y(t(x))$关于x是C^∞函数，从而（链索法则+反函数求导）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\tan t\text{。}$$

关于参数曲线

平面曲线$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$　　空间曲线$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$

一般形式$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$，

物理上：t时间，$\mathbf{x}(t)$质点位置，$\mathbf{x}'(t)$速度向量；

几何上：t参数，$\mathbf{x}(t)$曲线上的点，$\mathbf{x}'(t)$曲线切向量。

切线：过切点，沿切向量方向的直线

切线方程：$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + s\mathbf{x}'(t_0)$，$s \in (-\infty, +\infty)$是切线的参数。

对平面曲线$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ 切线的参数方程$\begin{cases} x = x(t_0) + sx'(t_0), \\ y = y(t_0) + sy'(t_0) \end{cases}$,

可以改写为直线的点-向式方程$\dfrac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$,

这是比例关系式，分母为零时，分子是零，例如$\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{3}$表示直线$x = 1$。

当$x'(t_0) \neq 0$时，可以改写为点-斜式方程$y - y(t_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0))$。

空间直线都有参数式方程和点向式方程，但只有平面曲线才有点斜式方程。

但平面曲线有上凸下凸，此时需要由参数方程计算$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$。

有人依据$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$臆测$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{y''(t)}{x''(t)}$。这是不对的！这样的人要读读伊索寓言中《盐贩和驴》的故事。

事实上，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{x'(t)^3}$。

由量纲分析（每个理工科学生都应该知道）也会发现$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{y''(t)}{x''(t)}$是不对的。

变量	量纲	变量	量纲	变量	量纲
y	A	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	AB^{-1}	$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	AB^{-2}
x	B	$y'(t)$	AC^{-1}	$y''(t)$	AC^{-2}
t	C	$x'(t)$	BC^{-1}	$x''(t)$	BC^{-2}
		$\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$	$\dfrac{AC^{-1}}{BC^{-1}}=AB^{-1}$	$\dfrac{y''(t)}{x''(t)}$	$\dfrac{AC^{-2}}{BC^{-2}}=AB^{-1}$

13．设 $y=x+x^2+x^5$，其反函数 $x=x(y)$ 满足在 $x(0)=0$，求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(0)$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(0)$。

解法 1： 先证明存在反函数，且反函数二阶可微。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+2x+5x^4,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2+20x^3,$$

知 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 在 $x=\frac{-1}{\sqrt[3]{10}}$ 处取最小值 $1-\frac{2}{\sqrt[3]{10}}+\frac{5}{10\sqrt[3]{10}}>0$，所以 y 严格增有反函数，且反函数 C^∞。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(0)=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0)}=\left.\frac{1}{1+2x+5x^4}\right|_{x=0}=1,\qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(0)=-\frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0)}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0)\right)^3}=\left.\frac{-2-20x^3}{(1+2x+5x^4)^3}\right|_{x=0}=-2。$$

常见错误：由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{1+2x+5x^4}$，再求导 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{-2-20x^3}{(1+2x+5x^4)^2}$。

解法 2：方程对 y 求导，得到 $1=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+5x^4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left(1+2x+5x^4\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，

代入 $x=y=0$，得到 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=1$。

再对 y 求导，得到

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1+2x+5x^4\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\left(1+2x+5x^4\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+2x+5x^4\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\left(1+2x+5x^4\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$$

$$=\left(2+20x^3\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2+\left(1+2x+5x^4\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$$

代入 $x=y=0$，$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=1$，得到 $\left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=0}=-2$。

常见错误：由$1=\left(1+2x+5x^4\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$求导，得到$0=\left(2+20x^3\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\left(1+2x+5x^4\right)\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$。

很多同学使用：$1=x'+2xx'+5x^4x'$，再求导得到$0=x''+2x'+2xx''+20x^3x'+5x^4x''$。这种导数符号容易引起混淆（不知道求导自变量是谁），建议改用 Leibniz 符号。比如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\left(1+2x+5x^4\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1+2x+5x^4\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\left(1+2x+5x^4\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$$

Leibniz 高阶导数符号的含义

解法 3：这本质上是 Newton 使用的办法，可惜现在不教了。

设 $y=x+u$，则 $u=x^2+x^5=o(x)=o(1)$。代入，得到

$y=(y-u)+(y-u)^2+(y-u)^5=y-u+y^2+o(y^2)+o(u)$，

所以 $u+o(u)=y^2+o(y^2)$，从而 $u=y^2+o(y^2)$，

因此 $x=y-u=y-y^2+o(y^2)$，从而 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=1$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=0}=-2$。

解法 4：反函数，$x=y+y^2+y^5$。两边求导：

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1+2y+5y^4$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=2+20y^3$，由此得 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=1$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=0}=2$。哪里有问题?

关于高阶可微性的重要补充

- f, g 是 r 阶可微 $\Rightarrow f \circ g$ 是 r 阶可微:

  链索法则 $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$，结合数学归纳法。

- f 是 r 阶可微， $f \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f}$ 是 r 阶可微:

  $$\left(\frac{1}{f}\right)' = -f' \cdot \left(\frac{1}{f}\right)^2$$，结合数学归纳法。

- f 是 r 阶可微， $f' \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ 是 r 阶可微:

  $$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'}$$，结合数学归纳法。

- 参数方程确定的函数的高阶可微性：反函数、复合函数的高阶可微性。

10. $\left(x\ln x\right)^{(n)}\Big|_{x=1}$

- Leibniz 公式：乘积的高阶导数

$$\left(x\ln x\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{(k)}\left(\ln x\right)^{(n-k)}=x(\ln x)^{(n)}+n(\ln x)^{(n-1)}=x(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}+n(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$\left(x\ln x\right)^{(n)}\Big|_{x=1}=(-1)^{n-2}(n-2)!(n-(n-1))=(-1)^{n-2}(n-2)!=(-1)^n(n-2)!$$

常见错误：结果不化简

- Taylor 展开：换元 $x=1+t$，

$$x\ln x=(1+t)\ln(1+t)=(1+t)\left[t-\frac{t^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}+o(t^n)\right]$$

$$=t+\cdots+t^n\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}\right)+o(t^n)=t+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{n!}t^n+o(t^n),\quad t\to 0.$$

单侧极限与连续、单侧导数与可微

4. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{tx}-e^{-x}}{e^{tx}+e^{x}}$的间断点。

解：【本题难度 0.87，可以跳过】$x=0$是唯一间断点，跳跃间断点，第一类间断点。

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{tx}-e^{-x}}{e^{tx}+e^{x}}=\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{tx}(1+o(1))}{e^{tx}(1+o(1))}=1, & x>0,\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{0}{2}=0, & x=0,\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-e^{-x}(1+o(1))}{e^{x}(1+o(1))}=-e^{-2x}, & x<0.\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1\neq1=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$。

11. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0; \\ \sqrt{1+ax}, & x<0 \end{cases}$

（I）求a值，使得 $f(x)$为可导函数；（II）此时 $f(x)$是否为二阶可导函数？写出理由。

解：（I）函数 f 对所有 $x<0$都有定义，所以$a\leq 0$。此时在除去$x=0$外，f 为初等函数，是C^{∞}函数。所以只需讨论 f 在$x=0$处的可微性。。

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}=1=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{1+ax}=1$，所以 f 是连续函数。

$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x}, & x>0; \\ \dfrac{a}{2\sqrt{1+ax}}, & x<0 \end{cases}$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} -e^{-x}=-1$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a}{2\sqrt{1+ax}}=\dfrac{a}{2}$。$f$ 在$x=0$处可导$\Leftrightarrow f'_+(0)=f'_-(0)$，即 $a=-2$。

（II） $f'(x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x>0;\\ -1, & x=0;\\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}, & x<0\end{cases}$ $\quad f''(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0;\\ \dfrac{-1}{(1-2x)^{3/2}}, & x<0\end{cases}$

因为 f' 连续，所以 $f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f''(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{-x}=1$， $f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f''(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-1}{(1-2x)^{3/2}}=-1$，

所以 f 在 $x=0$ 处不是二阶可导的。

解法 2： $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ ， $\sqrt{1+ax}=1+\dfrac{ax}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)a^2x^2}{2}+o(x^2)$， $x\to0$。

f 在 $x=0$ 可导当且仅当 $-1=\dfrac{a}{2}$，即 $a=-2$；此时 $\sqrt{1-2x}=1-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，所以 f 在 $x=0$ 不是二阶可导。

问题：

- $f'_+(x_0), f'(x_0+), f'_-(x_0), f'(x_0-), f'(x_0)$分别是什么？有什么关系？
- $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n), \quad x \to 0$与$f$在$x=0$处的$n$阶可微性有什么关系？

16.（I）设$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，证明数列$\{x_n\}$收敛；

（II）设$y_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

解:【第一部分是习题课题目，可省略不讲】(I) 因为 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,（这个公式可以直接用）,

所以$\{x_n\}$单调减：$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$。

另一方面，$\{x_n\}$有下界：

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

$$=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}>0$$。

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

(II) 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\gamma$，则 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$，其中 $\varepsilon_n=o(1),\quad n\to\infty$。

$$y_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=x_{2n}+\ln(2n)-x_n-\ln n\to\ln 2,\quad n\to\infty$$

而 $y_{2n+1}=y_{2n}+\frac{1}{2n+1}\to\ln 2,\quad n\to\infty$。所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\ln 2$。

(II) **解法 2**：由 Lagrange 余项 Taylor 公式，

$$\ln 2=\ln(1+1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)\xi^{n+1}},\quad 1<\xi<2,$$

所以 $\left|1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\ln 2\right|=\frac{1}{(n+1)\xi^{n+1}}<\frac{1}{n+1}\to 0,\quad n\to+\infty$。

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\ln 2$。

常见错误：只证明了 y_{2n} 收敛。用 Peano 余项 Taylor 公式。或直接用幂级数（缺理由）

解法 3:

$$y_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$\to\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2,\quad n\to+\infty$$

17.（I）设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，令 $x_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(x_0+\frac{k}{n^2}\right)-nf(x_0)$，证明：$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}f'(x_0)$；

（II）求 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$。

（I）**证明**：不妨设 $x_0=0, f(0)=0$（可以考虑 $g(t)=f(x_0+t)-f(x_0)$），记 $f'(0)=\lambda$。

则 $x_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$。

因为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=\lambda x+o(x),\quad x\to 0$，所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时，$-\varepsilon|x|\le f(x)-\lambda x\le\varepsilon|x|$。（这是本解答最重要的一步！它保证了极限的一致性）

当 $n>\frac{1}{\delta}+\frac{\lambda}{2\varepsilon}$ 时，对任意 $1\le k\le n$，$0<\frac{k}{n^2}<\delta$，因此 $-\frac{\varepsilon}{n}\le-\varepsilon\cdot\frac{k}{n^2}\le f\left(\frac{k}{n^2}\right)-\lambda\cdot\frac{k}{n^2}\le\varepsilon\cdot\frac{k}{n^2}\le\frac{\varepsilon}{n}$，

相加得到$-\varepsilon \le \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \lambda \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k}{n^2} \le \varepsilon$，即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{\lambda}{2}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{\lambda}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right| + \left|\frac{\lambda}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{\lambda}{2}\right| \le \varepsilon + \frac{\lambda}{n^2}\left|\sum_{k=1}^{n} k - \frac{n^2}{2}\right| = \varepsilon + \frac{\lambda}{2n} < 2\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\lambda}{2}$。

常见错误：$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \lambda \cdot \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{k}{n^2}\right) = \lambda \cdot \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$，

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} o\left(\frac{1}{n}\right) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + no\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\lambda}{2} + \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\right) + o(1) \to \frac{\lambda}{2}。$$

错在哪里？与第 1 题解法 1 中的情况有什么不同？

（II）解法 1：对 $f(x)=\ln(1+x)$，用结论 1。

解法 2：对任何正数 x，可以证明 $\frac{1}{x+1}\le\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$。

于是 $\frac{k}{n^2+n}\le\frac{k}{n^2+k}=\frac{1}{\frac{n^2}{k}+1}\le\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\le\frac{k}{n^2}$，从而 $\mathrm{e}^{\frac{k}{n^2+n}}\le1+\frac{k}{n^2}\le\mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}}$。因此

$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\leftarrow\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}}\le\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\le\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}}\to\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，所以所求极限值为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$。

解法 3：用均值不等式，

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\le\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^n=\left(1+\frac{n+1}{2n^2}\right)^n$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)}=\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)\left(\frac{n^2}{n^2+2}\right)\cdots\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)\le\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k}\right)^n$$

$$=\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n^2+k)}\right)^n\le\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n^2+n)}\right)^n=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n,$$

所以

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-n}\le\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\le\left(1+\frac{n+1}{2n^2}\right)^n$$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+1}{2n^2}\right)^n=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$。

完了