第 2 次习题课 函数极限与连续函数

第一部分：回顾

一、定义

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$： $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ \left[0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\right]$

六种极限： ε-δ， ε-N， ε-$(-N)$， M-δ， M-N， M-$(-N)$

一般地， $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$：对 A 的任何邻域 V，存在 a 的去心邻域 U 使得 $f(U)\subseteq V$。

预知极限值，用不等式放缩论证。

(1) $f:I\to\mathbf{R}$ 在聚点 $a\in I$ 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$；

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq a,\\ A, & x=a\end{cases}$ 在 a 处连续。（a 是 f 的连续点或可去间断点。）

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}|f(x)-A|=0$。

(3) 用定义验证的例子： $\lim\limits_{x\to a} x$， $\lim\limits_{x\to a}|x|$， $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$（要利用不等式 $0<\sin x<x$， $\forall 0<x<\dfrac{\pi}{2}$）

二、转化与分解

(1) 换元，复合函数连续性与复合函数极限 $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$（$g$ 连续或者 f 满足“避险条件”）

处理根式、反三角函数

(2) 四则运算（除法需验证前提条件），多项式和有理分式， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$（从 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 得到）， $\tan=\dfrac{\sin}{\cos}$ 是连续函数（从 $\sin,\cos$ 是连续函数得到）

(3) 单侧连续与单侧极限，间断点分类

(4) 函数极限夹挤定理， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$（从 $0<\sin x<x<\tan x\ \forall 0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 得到）。

(5) 归结为数列极限：

$\left[x_n\to a(x_n\neq a)\Rightarrow f(x_n)\to A\right]\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$

利用 $n\le x<n+1$ 以及函数单调性进行不等式放缩，归结为数列极限。例如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的处理过程。

三、极限的其他性质

(1) 唯一性

(2) 保序性（保号性）。从极限的严格不等式反推得到函数在局部满足的严格不等式；从函数不等式得到极限的（不严格）不等式。

(3) 有界性（仅仅是存在极限的必要条件），论证无极限或不连续

四、极限存在的充要条件

(1) Cauchy 准则：

对于任意$\varepsilon > 0$，存在a的去心邻域U_ε使得对任意$x_1, x_2 \in U_\varepsilon$，$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

(2) 单调有界收敛：

设 $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ 单调不减。则 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 存在当且仅当 f 有上界。

设 $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ 单调不减。则 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ 存在当且仅当 f 无上界。

单调函数总有单侧极限，单调函数的间断点只能是跳跃间断点或可去间断点

五、函数连续性

区间上的单调函数是连续函数当且仅当其值域是区间。

区间上的连续的严格单调函数的反函数是连续函数。

六、初等函数的连续性

$x^{\frac{1}{n}}$是连续函数（它是x^n的反函数），$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$是连续函数。$x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}(r \in \mathbf{Q})$ 是连续函数。

a^x是连续函数，$\log_a$是连续函数（它是a^x的反函数）。$x^\alpha = 2^{\alpha \log_2 x}$是连续函数。

$\arcsin, \arccos, \arctan$ 是连续函数（它们是$\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}, \cos|_{[0,\pi]}, \tan|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$的反函数）。

$\sin$在0连续

$\Downarrow$ $\Rightarrow \sin, \cos$ 是连续函数 $\Rightarrow \tan, \cot$ 是连续函数。

$\cos$在0连续

第二部分：习题

连续函数与函数极限的定义

1. 证明 $f(x)=|x|$ 是连续函数。

2. 设 $f_1,\dots,f_n$ 都在 I 上定义且在 a 连续。证明 $f(x)=\max\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ 在 a 连续。

3. 设 n 是正整数。证明 $f(x)=x^n$ 是连续函数。

4. 设 n 是正整数。证明 $f(x)=\sqrt[n]{x}$ 是连续函数。

复合函数与四则运算

5. 对有理分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 。

6. 对正有理数 $r=\dfrac{m}{n}$ 以及 $a>0$，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^r-a^r}{x-a}$ 。

7. 对正实数 β 以及 $a>0$，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\beta-a^\beta}{x-a}$ 。

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{7x-1}-3}{\sqrt{x}-2}$ 。

9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$ 。

10. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$ 。

夹挤定理，函数极限与数列极限

11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$， $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$ 。

12. 求 $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ 。（$\alpha>0$）

单侧极限、单侧连续、间断点类型、单调有界收敛

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 。（$[t]$ 是不超过 t 的最大整数，即 $[t]\le t<[t]+1$）

14. 讨论函数在给定点的间断类型。

(1) $\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$， $x=0$ 。

(2) $\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$， $x=1$

15. 设 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是有界的连续函数，令 $g(x)=\sup\limits_{a<t\le x}f(t)$ 。证明 $g:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是连续函数。

以下两题可以视情况选讲

16\. 设 $a>1$。 对正有理数 $r=\frac{m}{n}$，定义 $a^r=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$。对负有理数 r，定义 $a^r=\frac{1}{a^{-r}}$。 定义 $a^0=1$。

(1) 证明函数 $f(r)=a^r$ 是 $\mathbf{Q}\to(0,+\infty)$ 是严格增函数；

(2) 证明对任意 $x\in\mathbf{R}$，极限 $\lim\limits_{r(\in\mathbf{Q})\to x} a^r$ 存在，记 $a^x=\lim\limits_{r(\in\mathbf{Q})\to x} a^r$。

(3) 证明 $g(x)=a^x$ 是 $\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ 是严格增的连续函数。

(4) 对 $0<b<1$，定义 $b^x=\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^x}$。证明对任意正数 u,v 和任意实数 x,y， $u^x\cdot u^y=u^{x+y}$， $u^x\cdot v^x=(uv)^x$， $\left(u^x\right)^y=u^{xy}$。

17\. (1) 设 f 在 $x=0$ 处连续，m 是正整数，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x^m}=\lambda$。证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x^m}$ 存在并求它的值。

(2) 利用(1)的结论求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}$， $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^4}$ 的值。