第九周习题课题目

主题：泰勒公式、函数凹凸性以及函数渐近线

一.内容回顾：

（1）泰勒公式（包括皮亚诺余项和朗格拉日余项）

泰勒定理

若函数在含有x_0的某邻域内具有直到$n+1$阶的导数，则对于该邻域内任意点x，有泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\text{（拉格朗日余项）}$$

其中ξ介于x_0与x之间，$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$

若函数在含有x_0的某邻域内具有直到n阶的导数，则对于该邻域内任意点x，有泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\text{（皮亚诺余项）}$$

其中$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$

（2）常用函数的泰勒公式展开式：$e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),\dfrac{1}{1+x},(1+x)^n$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)}+o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^m=1+mx+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

（3）曲线的凹凸性与拐点：

（i）凹凸的定义；

若曲线弧上的每一点的切线都位于曲线的下方,则称这段弧是下凸的; 若曲线弧上的每一点的切线都位于曲线的上方,则称这段弧是上凸的;

（ii）凹凸性判别；

设函数f在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)内具有二阶导数。如果$f''(x)\le 0$, 但$f''(x)$在任何子区间中不恒为零，则曲线弧$y=f(x)$为上凸的。如果$f''(x)\ge 0$, 但$f''(x)$在任何子区间中不恒为零，则曲线弧$y=f(x)$为下凸的。

（iii）拐点存在的必要条件；连续曲线凹凸部分的分界点称为曲线的拐点.

函数 f(x)在点 x 具有二阶导数，则（x, f(x)）是曲线 f(x)拐点的必要条件为 f''(x)=0.

(iV)判定函数凹凸性，凹凸区间和拐点的一般步骤：（1）求出函数指定区域的二阶导（如果存在的话）；（2）在区域内求出所有可能的拐点；（3）列表并根据二阶导在各区间的正负紧性判别。

（4）曲线的渐近线与作图：垂直渐近线，水平渐近线，斜渐近线

作图步骤：（i）写出函数定义域或指定区域；（ii）判断函数的奇偶性、周期性（如有的话）；（iii）求出所有可能的渐近线；（iv）求出函数的一阶导函数，二阶导函数并求出相应可能的极值点、拐点，以及边界点和无意义点；（V）列表；（Vi）作图（配合使用其他特殊点）。

二.例题

1.设 $f(x)=x^2\cos x$，则 $f^{(30)}(0)$= ____________ 。

2.若 $f(x)$ 导数连续且 $f'(1)=1$，求 $f(\cos x)-f(\dfrac{2}{2+x^2})$ 当 $x\to 0$ 时等价无穷小量的阶。

3. 确定a,b的值，使当$x\to 0$时， $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 与 x^5 为同阶无穷小。

4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$ 在 $x_0=1$ 处带 Peano 的 Taylor 公式为 _____________。

5.求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ $(n\ge 3)$ 。

6.已知方程 $x^3+y^3+xy-1=0$ 在 $x=0$ 的某邻域内确定了一个二阶可导函数 $y=y(x)$ 。试求 $y(x)$ 的 Maclaurin 二阶展开式，带 Peano 型余项。

7. 求曲线 $y=(x-2)^{5/3}-\dfrac{5}{9}x^2$ 的凹凸区间与拐点。

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}$ 的渐近线。

二．证明题

1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

2　设 $f''(x)$ 在 (a,b) 内连续， $x_0,x_0+h\in(a,b),\ f''(x_0)\neq 0$，

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h),\quad \theta\in(0,1)$$

求证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$。

3　设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，其中 $0<\theta<1$，且 $f'''(x)\neq 0$，求证 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{3}$。

4　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导， $f(0)=f(1)$，且 $|f''(x)|\le 2$，求证：$|f'(x)|\le 1, x\in[0,1]$。

5　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=1$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

6　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0=f(1)$。 进一步假设 $\min\{f(x),x\in[0,1]\}=-1$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\ge 8$。

7　证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（$n>1$）在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

8　设 $f_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x$，证明

（I） $\forall n\in\mathbb{N}^+$， $f_n(x)=1$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内有且只有一个根；

（II）设 $x_n\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{6}$。

9　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数 $|f(x)|\le a$， $|f''(x)|\le b$，其中 a,b 是非负数，$c\in(0,1)$，

求证：$|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}.$

10　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，

证明：在开区间 $(-1,1)$ 内存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$。

11 设 $f\in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，试证

（1）$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$；

（2）$\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|\le\frac{1}{2}(b-a)\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$。