第八周习题课　微分中值定理，单调性，极值，洛必达法则　题目

- 费马定理：$f(x)$ 在 x_0 点取到极值，$f(x)$ 在 x_0 点可微，则 $f'(x_0)=0$ 。

- 罗尔定理：$f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 连续，在 $\left(a,b\right)$ 可微，$f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in\left(a,b\right)$，使 $f'(\xi)=0$

- 拉格朗日定理：$f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 连续，在 $\left(a,b\right)$ 可微，则 $\exists\xi\in\left(a,b\right)$，使
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- 柯西中值定理：$f(x)$，$g(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 连续，在 $\left(a,b\right)$ 可微，且 $g'(x)\neq 0$，则 $\exists\xi\in\left(a,b\right)$，

  使 $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}。$$

- （达布定理）导数零点定理：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$。

  则必 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$（在 x_0 处有水平切线）。

- 洛必达法则——求不定式的极限

  如果

  （1）$\lim f(x)=\lim g(x)=0$（或 ∞）

  （2）在极限点附近，$f'(x),\ g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

  （3）$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在或为无穷大，且等于 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

一．微分中值定理用于证明题

1. 在 $\left[0,1\right]$ 上，$0<f(x)<1$，$f(x)$ 可微，且 $f'(x)\neq 1$，证明在 $\left(0,1\right)$ 存在唯一的 ξ 使

   $f(\xi)=\xi$。

2. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，且存在相等的最大值，

   $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

3. 函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$，

$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$。 求证

（1）$g(x)\neq 0$，$\forall \mathrm{x}\in(a,b)$；

（2）$\exists c\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(c)}{g(c)}=\dfrac{f''(c)}{g''(c)}$。

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$。证明：

（I）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（II）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

【分析】 第一部分显然用闭区间上连续函数的介值定理；第二部分为双介值问题，可考虑用拉格朗日中值定理，但应注意利用第一部分已得结论.

5. $f(x)$ $[0,+\infty)$ 内可导，且在 $0\le f(x)\le \ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$，$\forall x\in[0,+\infty)$。证明：

$\exists\xi\in(0,+\infty),\quad f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$。

二．零点问题

6. 对任意正整数n，证明方程 $e^x-x^n=0$ 至多有三个不同的零点。

三．单调性与不等式问题

7. $y=x^{\frac{1}{x}}$（$x>0$）在____________________上增；在____________________上减。

8. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数，$f(0)=0, f(1)=1, f(f(x))=x$。证明：

（I）$f(x)$ 是单调函数；

（II）$f(x)=x$。

9. 设 $x>0$，证明不等式 $\dfrac{x}{x^2+2x+2}<\arctan(x+1)-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{x}{2}$。

10. 证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

四．洛必达法则

11. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

12. 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$。