第 1 次习题课题目解答

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 确界

(1) 非空实数集 A 的最小上界 (若存在) 叫作 A 的上确界, 记作 $\sup A$; 它的最大下界 (若存在) 叫作 A 的下确界, 记作 $\inf A$.

(2) **上确界的刻画:** $\xi = \sup A$ 当且仅当 ξ 为 A 的上界且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ 使得 $x > \xi - \varepsilon$.
否定形式: $\xi \neq \sup A$ 当且仅当 ξ 不是 A 的上界或 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\forall x \in A$, $x \leqslant \xi - \varepsilon$.

(3) **上确界与下确界的关系:** $\sup A = -\inf(-A)$.

(4) **确界定理:** 有上界的非空数集必有上确界; 有下界的非空数集必有下确界.

2. 数列极限的定义

(1) **极限的定义:** 称数列 $\{a_n\}$ 有极限 $A \in \mathbb{R}$, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 我们均有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 也称该数列收敛于 A, 记作 $a_n \to A\ (n \to \infty)$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 数列有极限也称为收敛, 否则称为发散.

(2) **否定形式:** 数列 $\{a_n\}$ 不收敛到 $A \in \mathbb{R}$ 当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N > 0, \exists n_N > N$ 满足 $|a_{n_N} - A| \geqslant \varepsilon_0$.

3. 数列极限的性质

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

(2) 从某项开始取常数的数列收敛到该常数, **反之不对**.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 而数列 $\{b_n\}$ 有界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(4) **唯一性:** 若数列收敛, 则其极限唯一.

(5) **有限韧性:** 改变数列的有限项不改变其敛散性.

(6) **均匀性:** 数列收敛当且仅当它的任意子列均收敛到同一个实数. **该结论常用来证明数列不收敛.**

(7) **有界性:** 收敛的数列有界.

(8) **局部保序:** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.
   (a) 若 $A > B$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n > b_n$.
   (b) 若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \geqslant b_n$, 则 $A \geqslant B$.

(9) **局部保号:** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.
   (a) 若 $A > 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n > 0$.
   (b) 若 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \geqslant 0$, 则 $A \geqslant 0$.
   (c) 若 $A \neq 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \neq 0$.

(10) **四则运算法则:** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则

(a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = AB$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$ (若 $B \neq 0$).

(11) **夹逼原理:** 假设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ 满足下列条件:

(a) $\exists n_0 > 0$ 使得 $\forall n > n_0$, 均有 $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

则数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

(12) 若数列 $\{a_n\}$ 非负且收敛于 A, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

4. 典型例题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(0 < |q| < 1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^n\big)^{\frac{1}{n}} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k$, 其中 $a_k \geqslant 0$;

(5) $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

5. 典型数列的增长速度比较

(1) **对数函数比常数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$;

(2) **幂函数比对数函数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$ (其中 $\alpha > 0$);

(3) **指数函数比幂函数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ (其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 1$);

(4) **连乘积比指数函数增长得更快:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ $(a \in \mathbb{R})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

(6) **平均性:** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$.

第 2 部分 习题课题目解答

1. 求证: 具有收敛子列的单调数列收敛.

证明: 设 $\{a_n\}$ 为单调数列. 不失一般性, 我们可假设该数列递增, 否则我们可考虑 $\{-a_n\}$. 设其子列 $\{a_{k_n}\}$ 收敛到 A. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K>0$ 使得 $\forall n>K$, 均有 $|a_{k_n}-A|<\varepsilon$, 也即 $A-\varepsilon<a_{k_n}<A+\varepsilon$. 令 $N=k_{K+1}>K$. 则 $\forall n>N$, 由于 $k_{K+1}\leqslant n\leqslant k_n$, 则由单调递增性可知

$$A-\varepsilon<a_{k_{K+1}}\leqslant a_n\leqslant a_{k_n}<A+\varepsilon,$$

故 $|a_n-A|<\varepsilon$. 因此数列 $\{a_n\}$ 也收敛到 A.

2. $\forall\theta\notin\mathbb{Z}\pi$, 求证: 数列 $\{\sin n\theta\}$ 发散.

证明: 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\theta=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)\theta=a$, 从而

$$0=\lim_{n\to\infty}(\sin(n+2)\theta-\sin n\theta)=\lim_{n\to\infty}2\sin\theta\cdot\cos(n+1)\theta.$$

但 $\theta\notin\mathbb{Z}\pi$, 故 $\sin\theta\neq0$, 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)\theta=0$, 进而

$$\lim_{n\to\infty}\sin2(n+1)\theta=\lim_{n\to\infty}2\sin(n+1)\theta\cdot\cos(n+1)\theta=0.$$

又收敛数列的任意子列均收敛到同一极限, 则我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n+1)\theta=a=\lim_{n\to\infty}\sin n\theta=\lim_{n\to\infty}\sin2(n+1)\theta=0,$$

于是 $1=\lim\limits_{n\to\infty}\big(\sin^2(n+1)\theta+\cos^2(n+1)\theta\big)=0$. 矛盾! 故所证成立.

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+2n-3}-\sqrt{2n^2+n})$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right)$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$ $(|x|<1)$,

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$,

(6) $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n$ $(x\in\mathbb{R})$.

解: (1) 由四则运算法则可得

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+2n-3}-\sqrt{2n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+2n-3)-(2n^2+n)}{\sqrt{2n^2+2n-3}+\sqrt{2n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{\sqrt{2+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$.

(3) $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \sin^2(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\pi n)\\ &= \Big(\sin\Big(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}\Big)\Big)^2\\ &\leqslant \Big(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}\Big)^2\leqslant\frac{\pi^2}{n}.\end{aligned}$$

于是 $\forall\varepsilon>0$, 若令 $N=[\frac{\pi^2}{\varepsilon}]+1$, 则 $\forall N>n$, 均有

$$\Big|\sin^2(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}})\Big|\leqslant\frac{\pi^2}{n}<\varepsilon.$$

从而我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}})=0$.

(4) 由于 $|x|<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$, 故

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x^{2^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1+(-\frac{2}{3})^n}{1+(-\frac{2}{3})^{n+1}}=\frac{1}{3}$.

(6) 若 $x\in\mathbb{Q}$, 则 $\exists p,q\in\mathbb{Z}$ $(q\geqslant 1)$ 使得 p,q 互素且 $x=\frac{p}{q}$. 故 $\forall m\geqslant q$, $m!\,x\in\mathbb{Z}$, 从而 $\cos(2\pi m!\,x)=1$, 于是 $\forall m\geqslant q$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=1$, 从而我们有 $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=1$.

若 $x\notin\mathbb{Q}$, 则 $\forall m\geqslant 1$, $|\cos(2\pi m!\,x)|<1$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=0$, 进而可得 $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=0$.

综上所述可知

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\big(\cos(2\pi m!\,x)\big)^n=\begin{cases}1 & 若\ x\in\mathbb{Q},\\ 0 & 若\ x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

4. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\big(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^n\big)^{\frac{1}{n}}+\big(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^{-n}\big)^{\frac{1}{n}}\Big)$, 其中 $a_k>0$ $(1\leqslant k\leqslant m)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\big((n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\big)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos(n^{10}!)$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big((\sin n!)(\frac{n-1}{n^2+1})^{10}-\Big(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\Big)^{\frac{2n^2+1}{n^2-1}}\Big)$.

解: (1) 令 $a=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k$, $A=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_k$, 则 $\forall n\geqslant 1$, 我们有

$$A+\frac{1}{a}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{m}a_k^n\Big)^{\frac{1}{n}}+\Big(\sum_{k=1}^{m}a_k^{-n}\Big)^{\frac{1}{n}}\leqslant\Big(A+\frac{1}{a}\Big)\sqrt[n]{m}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$, 则由夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\big(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^n\big)^{\frac{1}{n}}+\big(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^{-n}\big)^{\frac{1}{n}}\Big)=A+\frac{1}{a}$.

(2) $\forall n\geqslant 1$, $n^k\leqslant n^k+1\leqslant(n+1)^k$, 故 $\frac{1}{n+1}\leqslant(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{n}$, 于是

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}\leqslant 1,$$

进而由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}=1$.

同样地, $\forall n\geqslant 2$, $(n-1)^k\leqslant n^k-1\leqslant n^k$, 故 $\frac{1}{n}\leqslant(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{n-1}$, 于是

$$1\leqslant\sum_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\leqslant\frac{n}{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

从而由夹逼原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}=1$.

最后由四则运算法则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\big((n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\big)=2$.

(3) $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}=2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=2$.

(4) 由四则运算法则可知

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{e}.$$

(5) $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $|(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos(n^{10}!)|\leqslant|1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}|$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, 于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos(n^{10}!)=0$.

(6) $\forall n\geqslant 1$, 我们有 $|(\sin n!)(\frac{n-1}{n^2+1})^{10}|\leqslant\frac{1}{n^{10}}$. 于是由夹逼原理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\Big((\sin n!)\Big(\frac{n-1}{n^2+1}\Big)^{10}-\Big(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\Big)\frac{2n^2+1}{n^2-1}\Big)\\
=\;&\lim_{n\to\infty}-\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\Big)\cdot\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\\
=\;&\lim_{n\to\infty}-\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)\Big)\cdot\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\\
=\;&\lim_{n\to\infty}-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=-2.
\end{aligned}$$

5. 判断下列数列 $\{x_n\}$ 的收敛性:

(1) $x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$, (2) $x_n = n^{(-1)^n}$.

解: (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = -1$, 故数列 $\{x_n\}$ 发散.

(2) $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $x_{2n} = 2n$, 由此可知数列 $\{x_n\}$ 无界, 因此发散.

6. 设 $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, 而 $\forall n \geqslant 2$, 均有 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$.

解: 由题设可知, $\forall n \geqslant 1$, 我们有 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\big)$, 进而由四则运算法则可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\big)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}\big)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1 - \big(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\big)^{n+1}}{1 - \big(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\big)^{n+2}} \\
&= \frac{2}{1+\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

7. 设 $\forall n \geqslant 1$, 均有 $(2+\sqrt{2})^n = A_n + B_n\sqrt{2}$, 其中 $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$.

解: 由题设可知, $\forall n \geqslant 1$, 均有 $(2+\sqrt{2})^n = A_n + B_n\sqrt{2}$, 也即

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{j} 2^{n-2j} (\sqrt{2})^{2j}, \\
B_n &= \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{j} 2^{n-2j-1} (\sqrt{2})^{2j},
\end{aligned}$$

由此立刻可得 $A_n - B_n\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})^n$. 从而

$$A_n = \frac{1}{2}\big((2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n\big),\ B_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big((2+\sqrt{2})^n - (2-\sqrt{2})^n\big).$$

由此利用四则运算法则立刻可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\big((2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n\big)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\big((2+\sqrt{2})^n - (2-\sqrt{2})^n\big)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\big(1 + (\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}})^n\big)}{1 - (\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}})^n} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$