

微积分 A1 第 4 次习题课题目 导数的计算与应用、高阶导数的计算

第一部分：内容回顾

反函数求导法则： 设 f 在 (a, b) 上严格单调且连续, $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) \neq 0$, 则反函数

$$x = f^{-1}(y) \text{ 在 } y_0 = f(x_0) \text{ 处可导, 且 } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

参数方程确定的函数求导法则： $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$, 若 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 (a, b) 上可导, $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

由复合函数的链式法则可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

隐函数求导法则： 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数。如果能够证明隐函数可导, 则可以将方程 $F(x, y) = 0$ 中 y 视为 $y(x)$, 即

$$F(x, y(x)) = 0,$$

则可利用复合函数的求导法则, 方程两边对 x 求导, 从而求解 $y'(x)$.

高阶求导公式：

$$\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n},$$

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x),$$

$$(cf)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x), c \in \mathbb{R},$$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad (\text{Leibniz公式}).$$

第二部分：习题

1. 证明:1) $2^y = xy + 4(x \leq 0)$ 确定隐函数 $y = y(x)$;

2) $y(x)$ 在其定义域上可导, 并求 $y'(x)$ 及曲线 $y = y(x)$ 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程;

3) $y(x)$ 在其定义域上二阶可导, 并求 $y''(x)$.

2. 设曲线 $y = y(x)$ 二阶可导, 已知其极坐标方程为 $r = r(\theta)$. 求 $y'(x), y''(x)$.

3. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

为了近似求解 $f(x) = 0$, 我们用这条切线与 x 轴的交点 x_1 近似曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴的

交点 c . 换言之, 我们用方程 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ 的解 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 作为方程

$f(x) = 0$ 的近似解。以 x_1 代替 x_0 , 重复上面的过程, 得到 $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. 如此迭代下

去, 得到数列

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

近似求解方程的这种迭代法是牛顿首先提的, 所以叫做**牛顿法**。试用牛顿法计算算术平方根 \sqrt{a} .

(1) 设 $a > 0$, 求牛顿法计算 \sqrt{a} 的迭代公式。

(2) 任意取定 $x_0 > 0$, 试证迭代公式中数列 $\{x_n\}$ 收敛到 \sqrt{a} 。

(3) 证明: 计算 \sqrt{a} 的牛顿法是二次收敛的, 即存在常数 $c > 0$, 使得

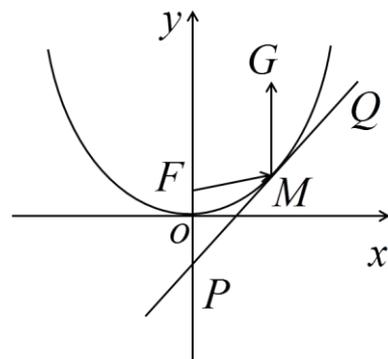
$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq c |x_n - \sqrt{a}|^2, \quad \forall n \geq 1.$$

4. 如图, 假设从光源 $F(0, 1)$ 处发出的光线经

过光滑曲线 $y = f(x)$ 反射后得到的光线与

y 轴平行, 求证: $y = f(x)$ 满足

$$xy'^2 + 2y'(1 - y) - x = 0, \quad y'(0) = 0.$$



5. 设 $y = f(g(x))$, 求 $y'''(x)$.

6. 求下列函数的 n 阶导数

(1) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0)$

(2) $f(x) = x^2 \cos 2x$

(3) $f(x) = e^x \sin x$

(4) $f(x) = x^n \ln x$

7. 设 $P_{n,m}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (1-x^m)^n$, 求 $P_{n,m}(1)$.

8. 设 $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^m$, 求 $y^{(n)}(0)$.