微积分 A1 第 4 次习题课答案　导数的计算与应用、高阶导数的计算

第一部分：内容回顾

反函数求导法则：设 f 在 (a,b) 上严格单调且连续，$x_0 \in (a,b),\ f'(x_0) \neq 0,$ 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导，且 $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}.$

参数方程确定的函数求导法则：$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a,b),$ 若 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 (a,b) 上可导，$\varphi(t)$ 在 (a,b) 上存在反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ 且 $\varphi'(t) \neq 0,$ 则

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

由复合函数的链式法则可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

隐函数求导法则：由方程 $F(x,y) = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数。如果能够证明隐函数可导，则可以将方程 $F(x,y) = 0$ 中 y 视为 $y(x),$ 即

$$F(x, y(x)) = 0,$$

则可利用复合函数的求导法则，方程两边对 x 求导，从而求解 $y'(x).$

高阶求导公式：

$\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n\pi}{2}),$

$\cos^{(n)} x = \cos(x + \frac{n\pi}{2}),$

$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n},$

$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x),$

$(cf)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x), c \in \mathbb{R},$

$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$　(Leibniz公式).

第二部分：习题

1. 证明:1) $2^y = xy + 4(x \le 0)$ 确定隐函数 $y = y(x)$,并求 $y(x)$ 的定义域与值域;

2) $y(x)$在其定义域上可导,并求$y'(x)$ 及曲线 $y = y(x)$ 在点 $(-2,1)$ 处的切线方程;

3) $y(x)$ 在其定义域上二阶可导,并求 $y''(x)$.

证明：1）由 $2^y = xy + 4(x \le 0)$ 得

$$0 \ge x = x(y) = \frac{2^y - 4}{y},\ y \in (0, 2].$$

$x(y)$在$(0,2]$上连续,且

$$\lim_{y\to 0^+} x(y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{2^y - 4}{y} = -\infty, \lim_{y\to 2^-} x(y) = \lim_{y\to 2^-} \frac{2^y - 4}{y} = 0,$$

因此 $x(y)$ 的值域为 $(-\infty, 0]$. $x(y)$在$(0,2]$上严格单调递增,因此 $x(y)$有反函数$y = y(x)$,

此反函数即 $2^y = xy + 4(x \le 0)$ 确定的隐函数，其定义域为$(-\infty, 0]$, 值域为$(0,2]$.

2）$x(y) = \dfrac{2^y - 4}{y}$在$(0,2]$上严格单调递增,且

$$x'(y) = \frac{y \cdot \ln 2 \cdot 2^y + (4 - 2^y)}{y^2} > 0, \quad \forall y \in (0, 2].$$

由反函数求导法则知因反函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上可导，且

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{y^2}{2^y(y\ln 2 - 1) + 4} = \cdots = \frac{y}{2^y \ln 2 - x},\quad x \in (-\infty, 0].$$

上面推导过程中省略部分需要用到原方程。

（既然已经证明了反函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上可导，我们也可以用隐函数求导的方法求解 $y'(x)$, 这样计算稍微简单一些：在方程 $2^y = xy + 4(x \le 0)$ 中视 $y = y(x)$, 两边对 x 求导，得

$$2^y \ln 2 \cdot y'(x) = y + xy'(x),$$

解得

$$y'(x) = \frac{y}{2^y \ln 2 - x},\quad x \in (-\infty, 0].$$

）

将 $x=-2$ 代入 $2^y=xy+4,$ 得 $y(-2)=1.$ 于是 $y'(-2)=\dfrac{1}{2\ln 2+4}$，$y=y(x)$ 在点 $(-2,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=\frac{x+2}{2\ln 2+4}.$$

3）由 2）中结论 $y'(x)=\dfrac{y}{2^y\ln 2-x}$ 以及复合函数的链式法则知，$y(x)$ 二阶可导，且

$$\begin{aligned}y''(x)&=\frac{y'(x)(2^y\ln 2-x)-y[2^y(\ln 2)^2y'(x)-1]}{(2^y\ln 2-x)^2}\\&=\frac{2y(2^y\ln 2-x)-2^y(\ln 2)^2\cdot y^2}{(2^y\ln 2-x)^3}.\end{aligned}$$

（求 $y''(x)$ 时，也可以在方程 $2^y=xy+4(x\le 0)$ 中视 $y=y(x),$ 两边对 x 求两次导数，解出 $y''(x)$.）

2. 设曲线 $y=y(x)$ 二阶可导，其极坐标方程为 $r=r(\theta).$ 求 $y'(x),y''(x)$（用 θ 的函数表示）。

解：由极坐标方程可得曲线的参数方程为

$$x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta.$$

因此

$$y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}.$$

$$y''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}\right)}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{(r'\sin\theta+r\cos\theta)'(r'\cos\theta-r\sin\theta)-(r'\sin\theta+r\cos\theta)(r'\cos\theta-r\sin\theta)'}{(r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta)^3}$$

$$=\frac{2(r')^2-rr''+r^2}{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^3}.$$

3. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

为了近似求解 $f(x)=0,$ 我们用这条切线与 x 轴的交点 x_1 近似曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点 $c.$ 换言之，我们用方程 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$ 的解 $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 作为方程 $f(x)=0$ 的近似解。以 x_1 代替 $x_0,$ 重复上面的过程，得到 $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$如此迭代下去，得到数列

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n=1,2,\cdots.$$

近似求解方程的这种迭代法是牛顿首先提的，所以叫做**牛顿法**。试用牛顿法计算算术平方根 $\sqrt{a}.$

（1）设 $a>0,$ 求牛顿法计算 $\sqrt{a}$ 的迭代公式。

（2）任意取定 $x_0>0,$ 试证迭代公式中数列 $\{x_n\}$ 收敛到 $\sqrt{a}$ 。

（3）证明：计算 $\sqrt{a}$ 的牛顿法是二次收敛的，即存在常数 $c>0,$ 使得

$$\left|x_{n+1}-\sqrt{a}\right|\le c\left|x_n-\sqrt{a}\right|^2,\quad \forall n\ge 1.$$

解：（1）记 $f(x)=x^2-a,\ \ \sqrt{a}$ 为方程 $f(x)=0$ 的正根。牛顿法求解方程 $f(x)=0$ 的迭代公式为

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}).$$

（2） $x_0>0,$ 由迭代公式知 $x_n>0,$ 且

$$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}})\ge\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a},\quad n=1,2,\cdots.$$

由此又可得

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_n^2})\le 1,\quad n=1,2,\cdots.$$

数列 $\{x_n\}$ 单调递减，有下界 $\sqrt{a},$ 故 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*.$ 由 $x_n\ge\sqrt{a}$ 得

$$x^*\ge\sqrt{a}>0.$$

在迭代关系式 $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}})$ 中令 $n\to+\infty,$ 得

$$x^* = \frac{1}{2}(x^* + \frac{a}{x^*}),$$

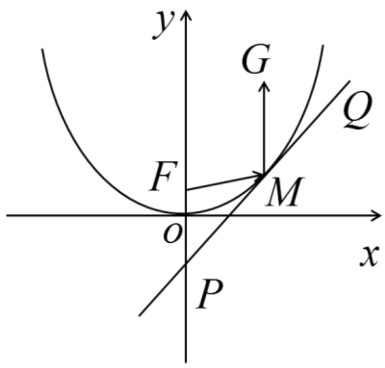
即 $(x^*)^2 = a.$ 又 $x^* > 0,$ 所以 $x^* = \sqrt{a}.$

（3）由迭代公式及 $x_n \ge \sqrt{a},$ 可得

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n}\right|$$
$$= \frac{1}{2x_n}\left|x_n - \sqrt{a}\right|^2 \le \frac{1}{2\sqrt{a}}\left|x_n - \sqrt{a}\right|^2, \quad \forall n \ge 1.$$

4. 如图，假设从光源 $F(0,1)$ 处发出的光线经过光滑曲线 $y = f(x)$ 反射后得到的光线与 y 轴平行，求证：$y = f(x)$ 满足

$$xy'^2 + 2y'(1-y) - x = 0, y'(0) = 0.$$



解：任取曲线 $y = f(x)$ 上一点 $M(t, f(t)),$ 过点 M 作曲线 $y = f(x)$ 的切线 MQ 与 y 轴交于点 $P.$ 对入射光线 $FM,$ 其反射光线 MG 与 y 轴平行。而由光线的发射定理，$\angle FMP = \angle GMQ.$ 因此 ΔFPM 为等腰三角形，且 $FP = FM.$ 切线 MQ 的方程为

$$y - f(t) = f'(t)(x - t),$$

MQ 与 y 轴的交点 P 的坐标为 $(0, f(t) - tf'(t)).$ 于是 $FP = FM$ 可以表示为

$$(1 - f(t) + tf'(t))^2 = t^2 + (1 - f(t))^2,$$

即

$$t^2(f'(t))^2 + 2tf'(t)(1 - f(t)) - t^2 = 0.$$

注意到 $t = 0$ 时，入射光线与反射光线均平行于 y 轴，因此切线平行于 x 轴，$f'(0) = 0.$ 于是 $f(t)$ 满足

$$t(f'(t))^2 + 2f'(t)(1 - f(t)) - t = 0, \quad f'(0) = 0.$$

5. 设 $y = f(g(x))$，求 $y'''(x).$

解： $y' = f'(g(x))g'(x)$，

$$y'' = f''(g(x))\left(g'(x)\right)^2 + f'(g(x))g''(x)$$

$$y''' = f'''(g(x))\left(g'(x)\right)^3 + 2f''(g(x))g'(x)g''(x) + f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x)$$

$$= f'''(g(x))\left(g'(x)\right)^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x)$$

6. 求下列函数的n阶导数

（1） $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}(c \neq 0)$　　　　（2） $f(x) = x^2\cos 2x$

（3） $f(x) = e^x \sin x$　　　　（4） $f(x) = x^n \ln x$

解：（1） $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a(x+d/c)+b-ad/c}{c(x+d/c)} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c^2}(x+d/c)^{-1}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{bc-ad}{c^2}\left(\frac{1}{x+d/c}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{bc-ad}{c^2} \cdot n!(x+d/c)^{-(n+1)}.$$

（2） $(\cos 2x)' = -2\sin 2x = 2\cos(2x+\dfrac{\pi}{2})$

$(\cos 2x)'' = -4\cos 2x = 2^2\cos(2x+2\cdot\dfrac{\pi}{2})$

$(\cos 2x)''' = 8\sin 2x = 2^3\cos(2x+3\cdot\dfrac{\pi}{2})$

$(\cos 2x)^{(4)} = 16\cos 2x = 2^4\cos(2x+4\cdot\dfrac{\pi}{2})$

$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n\cos(2x+\dfrac{n\pi}{2})$

$$f^{(n)}(x) = (x^2\cos 2x)^{(n)} = x^2(\cos 2x)^{(n)} + 2nx(\cos 2x)^{(n-1)} + n(n-1)(\cos 2x)^{(n-2)}$$

$$= 2^n x^2\cos(2x+\frac{n}{2}\pi) + 2^n nx\cos(2x+\frac{n-1}{2}\pi) + 2^{n-2}n(n-1)\cos(2x+\frac{n-2}{2}\pi)$$

$$= 2^n\left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right)\cos(2x+\frac{n\pi}{2}) + 2^n nx\sin(2x+\frac{n\pi}{2}).$$

（3）解法一： $(e^x\sin x)' = e^x(\sin x+\cos x) = \sqrt{2}e^x\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$,

$$(e^x\sin x)'' = \sqrt{2}e^x\left(\sin(x+\frac{\pi}{4}) + \cos(x+\frac{\pi}{4})\right) = (\sqrt{2})^2 e^x\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{4}),$$

设$(e^x\sin x)^{(m)}=(\sqrt{2})^m e^x\sin(x+\frac{m\pi}{4})$，则

$$(e^x\sin x)^{(m+1)}=(\sqrt{2})^m\left(e^x\sin(x+m\cdot\frac{\pi}{4})\right)'$$

$$=(\sqrt{2})^m e^x\left(\sin(x+\frac{m\pi}{4})+\cos(x+\frac{m\pi}{4})\right)=(\sqrt{2})^{m+1}\sin(x+\frac{m+1}{4}\pi).$$

由归纳法知 $$(e^x\sin x)^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4}).$$

解法二：定义复指数函数$e^{a+\mathrm{i}b}=e^a(\cos b+\mathrm{i}\sin b)$，可以验证

$$e^{\lambda_1+\lambda_2}=e^{\lambda_1}\cdot e^{\lambda_2},\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}.$$

定义实变量复值函数的导数运算：$(x(t)+\mathrm{i}y(t))'=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)$，可以验证

$$(e^{\lambda t})'=\lambda e^{\lambda},\forall\lambda\in\mathbb{C}.$$

于是 $$(e^x\cos x)^{(n)}+\mathrm{i}(e^x\sin x)^{(n)}=(e^x\cos x+\mathrm{i}e^x\sin x)^{(n)}$$

$$=(e^{(1+\mathrm{i})x})^{(n)}=(1+\mathrm{i})^n e^{(1+\mathrm{i})x}=\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^n\cdot e^{(1+\mathrm{i})x}=2^{n/2}e^{x+i(x+\frac{n\pi}{4})}$$

$$=2^{n/2}\left(e^x\cos(x+\frac{n\pi}{4})+\mathrm{i}e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4})\right).$$

$$(e^x\cos x)^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\cos(x+\frac{n\pi}{4}),\quad (e^x\sin x)^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4}).$$

（4） $f^{(n)}(x)=(f'(x))^{(n-1)}=(nx^{n-1}\ln x+x^{n-1})^{(n-1)}$

$$=(nx^{n-1}\ln x)^{(n-1)}+(n-1)!=(nx^{n-1}\ln x)^{(n-1)}+n!\cdot\frac{1}{n}$$

$$=(n(n-1)x^{n-2}\ln x+nx^{n-2})^{(n-2)}+n!\cdot\frac{1}{n}$$

$$=(n(n-1)x^{n-2}\ln x)^{(n-2)}+n!(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})$$

$$=(n(n-1)(n-2)x^{n-3}\ln x+n(n-1)x^{n-3})^{(n-3)}+n!(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})$$

$$=(n(n-1)(n-2)x^{n-3}\ln x)^{(n-3)}+n!(\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})$$

$$=\cdots=n!(\ln x+1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}).$$

7. 设$P_{n,m}(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^m)^n$，求$P_{n,m}(1)$.

解： 记 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n$，由 Leibniz 公式得

$$P_{n,m}(x)=\left((1-x)^n f(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(1-x)^{n-k}f^{(n-k)}(x),$$

$$P_{n,m}(1)=(-1)^n n!\,f(1)=(-1)^n n!\,m^n.$$

8. 设 $y=(x+\sqrt{x^2+1})^m$，求 $y^{(n)}(0)$.

解： $y'=m(x+\sqrt{x^2+1})^{m-1}(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}})=\dfrac{my}{\sqrt{x^2+1}}$，即

$$\sqrt{x^2+1}y'=my.$$

两边对 x 求导，得 $$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}y'+\sqrt{x^2+1}y''=my'=\frac{m^2y}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$xy'+(x^2+1)y''=m^2y.$$

两边对 x 求 n 阶导，由 Leibniz 公式得

$$\begin{aligned}&xy^{(n+1)}+ny^{(n)}+(x^2+1)y^{(n+2)}+2nxy^{(n+1)}+n(n-1)y^{(n)}=m^2y^{(n)},\\&(x^2+1)y^{(n+2)}+(1+2n)xy^{(n+1)}+(n^2-m^2)y^{(n)}=0.\end{aligned}$$

令 $x=0$，得

$$y^{(n+2)}(0)=(m^2-n^2)y^{(n)}(0).$$

又 $y(0)=1, y'(0)=m, y''(0)=m^2$，故

$$\begin{aligned}&y^{(2k+1)}(0)=(m^2-(2k-1)^2)(m^2-(2k-3)^2)\cdots(m^2-3^2)(m^2-1^2)m,\\&y^{(2k)}(0)=(m^2-(2k-2)^2)(m^2-(2k-4)^2)\cdots(m^2-4^2)(m^2-2^2)m^2.\end{aligned}$$