第九周习题课参考答案

主题：泰勒公式、函数凹凸性以及函数渐近线

一.内容回顾：

（1）泰勒公式（包括皮亚诺余项和朗格拉日余项）

泰勒定理

若函数在含有x_0的某邻域内具有直到$n+1$阶的导数，则对于该邻域内任意点x，有泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\text{（拉格朗日余项）}$$

其中ξ介于x_0与x之间，$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$

若函数在含有x_0的某邻域内具有直到n阶的导数，则对于该邻域内任意点x，有泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\text{（皮亚诺余项）}$$

其中$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$

（2）常用函数的泰勒公式展开式：$e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),\dfrac{1}{1+x},(1+x)^n$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)}+o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

（3）曲线的凹凸性与拐点：

（i）凹凸的定义；

若曲线弧上的每一点的切线都位于曲线的下方,则称这段弧是下凸的; 若曲线弧上的每一点的切线都位于曲线的上方,则称这段弧是上凸的;

（ii）凹凸性判别；

设函数f在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)内具有二阶导数。如果$f''(x)\le 0$, 但$f''(x)$在任何子区间中不恒为零，则曲线弧$y=f(x)$为上凸的。如果$f''(x)\ge 0$, 但$f''(x)$在任何子区间中不恒为零，则曲线弧$y=f(x)$为下凸的。

（iii）拐点存在的必要条件；连续曲线凹凸部分的分界点称为曲线的拐点.

函数 f(x)在点 x 具有二阶导数，则（x, f(x)）是曲线 f(x)拐点的必要条件为 f″(x)=0.

(iV)判定函数凹凸性，凹凸区间和拐点的一般步骤:（1）求出函数指定区域的二阶导（如果存在的话)；（2）在区域内求出所有可能的拐点；（3）列表并根据二阶导在各区间的正负紧性判别。

（4）曲线的渐近线与作图：垂直渐近线，水平渐近线，斜渐近线

作图步骤:（i）写出函数定义域或指定区域；（ii）判断函数的奇偶性、周期性（如有的话)；（iii）求出所有可能的渐近线；（iv）求出函数的一阶导函数，二阶导函数并求出相应可能的极值点、拐点，以及边界点和无意义点；（V）列表；（Vi）作图（配合使用其他特殊点)。

二.例题

1.设 $f(x)=x^2\cos x$，则 $f^{(30)}(0)$= ____________ 。

【答案】 870

【要点】 利用 Taylor 展开的系数求高阶导数。

【解析】 $f(x)=x^2\cos x=x^2-\frac{1}{2!}x^4+\cdots+\frac{1}{28!}x^{30}+o(x^{30}),\quad x\to 0$，

$$f^{(30)}(0)=30!\cdot\frac{1}{28!}=870$$

2.若 $f(x)$ 导数连续且 $f'(1)=1$，求 $f(\cos x)-f(\frac{2}{2+x^2})$ 当 $x\to 0$ 时等价无穷小量的阶。

【解析】$f(\cos x)=f(1+(\cos x-1))=f(1)+f'(1)(\cos x-1)+O(x^2)$，

$$f(\frac{2}{2-x^2})=f(1+\frac{x^2}{2-x^2})=f(1)+f'(1)(\frac{x^2}{2-x^2})+O(x^2)\quad ,$$

$x\to 0$

$$f(\cos x)-f(\frac{2}{2+x^2})=\left(\cos x-1\right)-\frac{x^2}{2+x^2}+O(x^4)=-x^2+O(x^2)\ ,$$

$x\to 0$

故等价无穷小量的阶为 2。

3. 确定a,b的值，使当$x\to 0$时，$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$与x^5为同阶无穷小。

【考点】Taylor 展开

【解析】

$$f(x)=x-a\sin x-\frac{1}{2}b\sin 2x$$

$$=x-a[x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\circ(x^5)]-\frac{1}{2}b[2x-\frac{1}{6}(2x)^3+\frac{1}{120}(2x)^5+\circ(x^5)]$$

$$=(1-a-b)x+\frac{1}{6}(a+4b)x^3-\frac{1}{120}(a+16b)x^5+\circ(x^5),$$

当 $1-a-b=0,a+4b=0$

即 $a=4/3,b=-1/3$

便有 $f(x)=\frac{2}{15}x^5+\circ(x^5)$，

亦即 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 与 x^5 为同阶无穷小。

4. $f(x)=\frac{1}{x^2-2x}$在$x_0=1$处带 Peano 的 Taylor 公式为 ______________。

【答案】 $-1-(x-1)^2-(x-1)^4-\cdots-(x-1)^{2n}+o\left((x-1)^{2n}\right)$

【考点】Taylor 展开。

【解析】$f(x)=-\dfrac{1}{1-(x-1)^2}=-1-(x-1)^2-(x-1)^4-\cdots-(x-1)^{2n}+o\left((x-1)^{2n}\right)$，

$x\to 1$。

5.求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$。

【考点】莱布尼茨公式求高阶导数，Taylor 展开

【解析】方法一：

由莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$$

及 $\left[\ln(1+x)\right]^{(k)}=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)}{(1+x)^k}$（$k$ 为正整数）

得 $f^{(n)}(x)=x^2\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$

于是可得

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$$

方法二：由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

及

$$\begin{aligned}x^2\ln(1+x)&=x^2\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+\cdots\right]\\&=x^3-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+\cdots\end{aligned}$$

比较 x^n 的系数得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{(n-1)}}{n-2}$$

所以 $f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{(n-1)}n!}{n-2}$

6.已知方程 $x^3+y^3+xy-1=0$ 在 $x=0$ 的某邻域内确定了一个二阶可导函数 $y=y(x)$。

试求 $y(x)$ 的 Maclaurin 二阶展开式，带 Peano 型余项。

解：由方程 $x^3+y^3+xy-1=0$ 可知，$y(0)=1$。

方程两端关于 x 求导得 $3x^2+3y^2y'+y+xy'=0$，令 $x=0,y=1$ 得 $y'=-1/3$；

上式再次求导得 $6x+6y(y')^2+3y^2y''+2y'+xy''=0$，

令 $x=0,y=1$，$y'=-1/3$ 代入得 $y''=0$，也即 $y''(0)=0$。

由此得到二阶 Maclaurin 展开式 $y(x)=1-\dfrac{x}{3}+o(x^2)$。

7. 求曲线 $y=(x-2)^{5/3}-\dfrac{5}{9}x^2$ 的凹凸区间与拐点。

解：(1) $y'=\dfrac{5}{3}(x-2)^{2/3}-\dfrac{10}{9}x$，

$$y''=\frac{10}{9}(x-2)^{-1/3}-\frac{10}{9}=\frac{10}{9}\cdot\frac{1-(x-2)^{1/3}}{(x-2)^{1/3}}.$$

(2) y'' 的零点是 $x_1=3$，y'' 不存在的点是 $x_2=2$。

(3) 列表讨论如下：

x	$(-\infty,2)$	2	(2, 3)	3	$(3,+\infty)$
$f''(x)$	−	不存在	+	0	−
曲线 $y=f(x)$	$\cap$	拐点 $\left(2,-\frac{20}{9}\right)$	$\cup$	拐点 (3, −4)	$\cap$

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}$ 的渐近线。

解（1） $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=-\infty$，

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=+\infty$$

故有垂直渐近线： $x=1$

（2） $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=+\infty$，所以，无水平渐近线。

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x(x-1)}=+\infty$，

所以，当 $x\to+\infty$ 时，没有斜渐近线。

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x(x-1)}=-3=a$，

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to-\infty}[\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}+3x]$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)+3x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x^2+1)e^x-3x-1}{x-1}=-3$ 所以，当 $x\to-\infty$ 时，

有斜渐近线：　$y=-3(x+1)$。

二．证明题

1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

证明：记 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ，则

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=F'(\eta),\quad \eta\in(x,b),$$

$$F'(\eta)=\frac{f'(\eta)(\eta-a)-(f(\eta)-f(a))}{(\eta-a)^2}$$

$f(a)$ 在 η 点的 Taylor 公式为

$$f(a)=f(\eta)+f'(\eta)(a-\eta)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-\eta)^2,\quad \xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$$

$$F'(\eta)=\frac{f'(\eta)(\eta-a)-(f(\eta)-f(a))}{(\eta-a)^2}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

2　设 $f''(x)$ 在 (a,b) 内连续， $x_0, x_0+h\in(a,b),\ f''(x_0)\neq 0$，

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h),\quad \theta\in(0,1)$$

求证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$。

证明： $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$，

$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\theta hf'(x_0+\xi\theta h),\quad \xi\in(0,1)$，代入

$f(x_0+h)=f(x_0)+h\left[f'(x_0)+\theta hf'(x_0+\xi\theta h)\right]$

由 Taylor 公式， $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\dfrac{1}{2}h^2f''(x_0+\eta h),\quad \eta\in(0,1)$，故

$$\theta f'(x_0+\xi\theta h)=\frac{1}{2}f''(x_0+\eta h)$$

而 $f''(x)$ 在 (a,b) 内连续， $x_0, x_0+h\in(a,b),\ f''(x_0)\neq 0$，令 $h\to 0$ 可得 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$。

3　设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，其中 $0<\theta<1$，且 $f'''(x)\neq 0$，求证 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{3}$。

证明： $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2}f''(x)h^2+\dfrac{1}{6}f'''(\xi)h^3$

$=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$

$\dfrac{1}{2}f''(x)h^2+\dfrac{1}{6}f'''(\xi)h^3=\dfrac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$

$f''(x)+\dfrac{1}{3}f'''(\xi)h=f''(x+\theta h)$

$\dfrac{1}{3}f'''(\xi)=\dfrac{f''(x+\theta h)-f''(x)}{\theta h}\cdot\theta$

令 $h\to 0$， $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{3}$。

4　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导， $f(0)=f(1)$，且 $\left|f''(x)\right|\leq 2$，求证： $\left|f'(x)\right|\leq 1, x\in[0,1]$。

证明：$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$$

相减，$f(0)=f(1)$，可得 $f'(x)=\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2\right]$，

$$\left|f'(x)\right|\le\frac{1}{2}\cdot 2\left[x^2+(1-x)^2\right]\le 1$$

5　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=1$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

解：令 $F(x)=e^x f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lagrange 定理条件，于是

$$\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]，其中 \eta\in(a,b)$$

由 $f(a)=f(b)=1$，则有 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]$，

另取 $g(x)=e^x$，则又有 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi$，其中 $\xi\in(a,b)$，

综合上述两个等式即有　$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$

6　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0=f(1)$。进一步假设 $\min\{f(x),x\in[0,1]\}=-1$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\ge 8$。

证明：设 $f(x)$ 在点 $x_0\in(0,1)$ 处取得最小值，则 $f(x_0)=-1$ 且 $f'(x_0)=0$。将函数值 $f(0)=0$ 和 $f(1)=0$ 在点 x_0 处作 Taylor 一阶展开，带 Lagrange 余项，则有

$0=f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)(0-x_0)^2$，$\eta_1\in(0,x_0)$，

$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)(1-x_0)^2$，$\eta_2\in(x_0,1)$。

于是我们就得到 $\frac{1}{2}f''(\eta_1)x_0{}^2=1$ 和 $\frac{1}{2}f''(\eta_2)(1-x_0)^2=1$。进一步由此得

$$\tfrac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\text{。}$$

一方面，上式左边是平均值$\tfrac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$，介于两个值$f''(\eta_1)$和$f''(\eta_2)$之间。根据Darboux 定理（导数介值定理）可知，存在一点ξ介于η_1和η_2之间，使得$f''(\xi)=\tfrac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$。另一方面我们对右边可作如下估计：

$$\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\ge\min\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2},\lambda\in(0,1)\right\}\text{。}$$

不难证明，上述不等式左边当$\lambda=1/2$时取得最小值8。这就证明了存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)\ge 8$。证毕。

7　证明：方程$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（$n>1$）在$(0,1)$内必有唯一实根x_n，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

证明：记$F_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，$F_n(0)=-1,F_n(1)=n-1$，由连续函数介值定理可知，$F_n(x)$在在$(0,1)$内必有一实根。

$F_n'(x)=nx^{n-1}+\cdots+1>0$，故$F_n(x)$在在$(0,1)$内必有唯一实根$x_n$。

$$x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n=1$$

$$x_{n-1}{}^{n-1}+x_{n-1}{}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}=1$$

相减，$x_n{}^n+\left[\left(x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n\right)-\left(x_{n-1}{}^{n-1}+x_{n-1}{}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}\right)\right]=$

$$x_n{}^n+(x_n-x_{n-1})Q=0$$

其中Q的各项都为正，故$x_n-x_{n-1}<0$，$\{x_n\}$单调降，有下界0，故收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

$$\frac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}=1$$

$$\frac{A}{1-A}=1,\quad A=\frac{1}{2}$$

8　设$f_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x$，证明

（I）$\forall n\in \mathbb{N}^{+}$， $f_n(x)=1$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 内有且只有一个根；

（II）设 $x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}$。

证明：（I）令 $F_n(x)=f_n(x)-1$，则 $F_n(\frac{\pi}{2})\geq 0, F_n(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1$，所以存在 $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right], F_n(\xi)=0$。

$F_n'(x)=\cos x+2\sin x\cos x+\cdots+n\sin^{n-1}x\cos x>0, x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $F_n(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 严格单调增，$F_n(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 只有一个零点。

（II）设 $x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，因为 $f_n(x)>f_{n-1}(x)$，所以 $x_{n-1}>x_n$，$\{x_n\}$ 单调减且有下界，$\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

$$1=\sin x_n+\sin^2 x_n+\cdots+\sin^n x_n=\frac{\sin x_n(1-\sin^n x_n)}{1-\sin x_n}$$

两边取极限，$1=\frac{\sin A}{1-\sin A}$， $\sin A=\frac{1}{2}$， $A=\frac{\pi}{6}$。

9 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数 $|f(x)|\leq a$，$|f''(x)|\leq b$，其中 a,b 是非负数，$c\in(0,1)$，求证：$|f'(c)|\leq 2a+\frac{b}{2}.$

证明：函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 点的二阶 Taylor 展开为：

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$
$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2$$
$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2$$

故 $$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2\right]$$

$$|f'(c)| = \left| f(1) - f(0) - \frac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(1-c)^2 - f''(\xi_1)c^2 \right] \right|$$

$$\le 2a + \frac{b}{2}\left[(1-c)^2 + c^2\right] \le 2a + \frac{b}{2}$$

10 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，

证明：在开区间 $(-1,1)$ 内存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$。

证明：$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi_1)x^3$

分别令 $x=-1, x=1$，

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0) - \frac{1}{3!}f'''(\xi_1)$$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{3!}f'''(\xi_2)$$

相减，$f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$。由三阶导数的连续性，在开区间 $(-1,1)$ 内存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$。（其实本题的三阶导数存在即可以证明，三阶导数即使不连续，介值性质依然成立）。

11 设 $f \in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，试证

（1）$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$；

（2）$\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)| \le \frac{1}{2}(b-a) \max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$。

证明：（1）不妨设 $f(x)$ 不恒为零，并设 $|f(x_0)| = \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，则 $f'(x_0)=0$，

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

$$0 = f(a) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2 \qquad （1）$$

$$0 = f(b) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2 \qquad （2）$$

如果 $x_0 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$，由（1）式可得$\left|f(x_0)\right| = \max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)\right| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$；如果 $x_0 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$，由（2）式可得$\left|f(x_0)\right| = \max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)\right| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$。

（1） 设$\left|f'(x_0)\right| = \max\limits_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|$，

$$0 = f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2$$

$$0 = f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2$$

相减，$\left|f'(x_0)(b-a)\right| = \frac{1}{2}\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|[(b-x_0)^2 + (a-x_0)^2] \le \frac{1}{2}\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|(b-a)^2$。故 $\max\limits_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right| \le \frac{1}{2}(b-a)\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$。